

# CONSTRUCȚII CU ELEMENTE DE BAZĂ

## I. DREPTE ȘI SEGMENTE

1. Trasați o dreaptă  $d$  și alegeți pe aceasta punctele  $A$  și  $B$  astfel încât  $AB = 4,3$  cm și punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $CD = 3,4$  cm.
2. Trasați o dreaptă  $d$  și alegeți pe aceasta la întâmplare punctele  $A$  și  $B$ . Măsurați apoi lungimea segmentului  $[AB]$  (în cm și la zecimi mm).
3. Construiți segmentele  $[AB]$  și  $[BC]$  de lungimi  $AB = 3,5$  cm și  $BC = 5$  cm, astfel încât punctele  $A, B, C$  să nu fie coliniare. Trasați apoi segmentul  $[AC]$  cu o linie întreruptă și măsurați lungimea acestuia (în cm, cu zecimile mm).
4. Construiți segmentele  $[AB]$  și  $[BC]$  de lungimi  $AB = 3,5$  cm și  $BC = 5$  cm, astfel încât punctele  $A, B, C$  să fie coliniare. Fără a măsura, stabiliți apoi lungimea segmentului  $[AC]$ . Atenție că există două variante de construcție posibile, cu răspunsuri finale diferite, așa încât trebuie să le faceți pe amândouă.
5. Construiți segmentele  $[AB]$  și  $[BC]$  de lungimi  $AB = 5,7$  cm și  $BC = 3,2$  cm, astfel încât dreptele  $AB$  și  $BC$  să fie perpendiculare. Trasați cu linie întreruptă segmentul  $[AC]$  și măsurați lungimea sa.
6. Trasați două drepte paralele  $a$  și  $b$  (cu creionul, de o parte și de alta a unui liniar), iar apoi construiți pe dreapta  $a$  un segment  $[CD]$  cu lungimea de 4 cm, iar pe dreapta  $b$  un segment  $[EF]$  cu lungimea de 6 cm. **a)** Uniți cu linie întreruptă dreapta punctele  $C$  și respectiv  $D$  cu fiecare din punctele  $E$  și  $F$ , iar apoi măsurați lungimea celor patru segmente obținute, consemnând lungimea pe fiecare segment (în cm, cu exactitate de mm).
7. Trasați cu un liniar două drepte paralele  $a$  și  $b$ , de o parte și de alta a liniarului. Pe dreapta  $a$  alegeți un punct  $A$  iar apoi construiți pe dreapta  $b$  un punct  $B$  astfel încât  $AB = 5$  cm. Câte posibilități diferite sunt de a alege punctul  $B$ ? Construiți-le pe toate.

8. Trasați cu un liniar două drepte paralele  $a$  și  $b$  (se notează  $a \parallel b$ ), iar apoi cu un echer dreapta  $c$  perpendiculară comună pe dreptele  $a$  și  $b$ .
9. Trasați cu un liniar două drepte paralele  $a$  și  $b$  ( $a \parallel b$ ), alegeți pe dreapta  $a$  un punct  $A$ , iar apoi, folosind un echer, determinați pe dreapta  $b$  punctul  $B$  astfel încât dreapta  $AB$  să fie perpendiculară pe cele două drepte paralele  $a$  și  $b$ . Măsurați lungimea  $AB$ ; aceasta se numește distanța dintre dreptele  $a$  și  $b$  (lățimea liniarului folosit).
10. Trasați două drepte intersectate oblic (nici paralele, dar nici perpendiculare) și notați cu  $P$  punctul lor de intersecție. Apoi construiți pe fiecare din cele patru semidrepte formate câte unul din punctele  $A, B, C$  și  $D$ , astfel încât  $PA = 3$  cm,  $PB = 3,5$  cm,  $PC = 4$  cm și respectiv  $PD = 4,5$  cm. Alegeți punctele în așa fel încât  $A, P$  și  $D$  să fie coliniare. Cum se numesc în acest caz punctele  $B, P$  și  $C$  împreună? Dar punctele  $A, P$  și  $B$  împreună?
11. Trasați trei drepte concurente și notați cu  $P$  punctul lor de intersecție.  
**a)** Construiți pe fiecare din cele șase semidrepte formate, la rând în sensul acelor de ceasornic, câte unul din punctele  $A, B, C, D, E$  și  $F$ , astfel încât  $PA = 2$  cm,  $PB = 2,5$  cm,  $PC = 3$  cm,  $PD = 3,5$  cm,  $PE = 4$  cm și respectiv  $PF = 4,5$  cm. **b)** Trasați apoi cu linie întreruptă segmentele  $[AB], [BC], [CD], [DE]$  și  $[EF]$ , obținând o linie frântă în formă de cochilie de melc (început de spirală). Măsurați (în cm cu exactitate de zecimi mm) lungimile segmentelor trasate cu linie întreruptă și scrieți pe fiecare lungimea sa. Calculați în final lungimea totală a liniei frânte  $A-B-C-D-E-F$ .
12. Trasați o dreaptă  $a$ , alegeți pe aceasta un punct  $A$  iar apoi, folosind un echer, prin  $A$  trasați o dreaptă  $b$  perpendiculară pe  $a$  (notat  $b \perp a$ ). Alegeți un alt punct  $B$  pe dreapta  $b$ , astfel încât  $AB = 5$  cm, iar în acest punct trasați o perpendiculară  $c$  pe dreapta  $b$  ( $c \perp b$ ). Cum stau una față de cealaltă dreptele  $a$  și  $c$ ?

## II. SEGMENTE CONGRUENTE

13. Construiești trei puncte necolineare  $M$ ,  $N$  și  $P$ , astfel încât  $MN = NP = 4$  cm. Cum sunt segmentele  $[MN]$  și  $[NP]$  unul față de celălalt?
14. Trasești o dreaptă  $d$  iar pe aceasta alegești trei puncte  $A$ ,  $B$  și  $C$  astfel încât  $AB = BC = 5$  cm. Cum sunt segmentele  $[AB]$  și  $[BC]$  unul față de celălalt?
15. Pe o dreaptă  $d$  alegești la întâmplare două puncte  $A$  și  $B$ . Determinați apoi poziția punctului  $C$  pe dreapta  $d$  astfel încât  $[BC] \equiv [AB]$ , fără a măsura lungimea segmentului  $[AB]$  (fără a folosi liniarul; puteți folosi în schimb compasul).
16. Trasești cu un liniar două drepte paralele  $a \parallel b$ . Alegești la întâmplare trei puncte  $A$ ,  $B$  și  $C$  pe dreapta  $a$ . Construiești apoi punctele  $D$ ,  $E$  și  $F$  pe dreapta  $b$ , astfel încât dreptele  $AD$ ,  $BE$  respectiv  $CF$  să fie perpendiculare pe cele două paralele  $a$  și  $b$ . În ce relație sunt segmentele  $[AD]$ ,  $[BE]$  și  $[CF]$  unul față de celălalt? În ce relație sunt dreptele  $AD$ ,  $BE$  și  $CF$  una față de cealaltă.
17. Trasești două drepte perpendiculare  $a \perp b$  și notezi cu  $O$  punctul lor de intersecție. Alegești apoi la întâmplare punctul  $A$  pe dreapta  $a$  și punctul  $B$  pe dreapta  $b$  astfel încât segmentele  $[OA]$  și  $[OB]$  să nu fie congruente. Determinați apoi punctul  $C$  pe dreapta  $a$  astfel încât  $[AO] \equiv [OC]$ , cât și punctul  $D$  pe dreapta  $b$  astfel încât  $[BO] \equiv [OD]$ , fără a folosi liniarul pentru măsurarea lungimii segmentelor (puteți folosi în schimb compasul). Trasești apoi cu liniarul, cu linie întreruptă, segmentele  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  și  $[DA]$ . Figura trasată cu linie întreruptă se numește romb și o vom studia în viitor.
18. Trasești segmentul  $[AB]$  cu lungimea de 7 cm și stabilești mijlocul său  $M$ , prin măsurare cu liniarul. Folosind apoi un echer trasești mediatoarea segmentului  $[AB]$  (perpendiculara pe acesta în mijlocul său). Alegești în final pe mediatoarea două puncte  $E$  și  $F$  situate la 5 cm depărtare de  $M$ . Cum sunt segmentele  $[EM]$  și  $[FM]$  unul față de

celălalt? Uniți cu linie întreruptă punctele  $E$  și  $F$  cu punctele  $A$  și  $B$ . Recunoașteți figura determinată de cele patru segmente cu linie întreruptă (cum se numește)?

19. Trasești segmentul oarecare înclinat  $[AB]$ . Fără a-i măsura lungimea, construiești mediatoarea acestuia și notezi mijlocul segmentului  $[AB]$  cu  $M$ . Verificăți dacă punctul  $M$  obținut este într-adevăr mijlocul segmentului  $[AB]$ , folosind un compas. Verificați apoi cu un echer dacă într-adevăr mediatoarea este perpendiculară pe drapta  $AB$ . Fără a folosi măsurarea lungimilor cu liniarul, ci doar prin utilizarea compasului, fixați apoi pe mediatoarea punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $[AM] \equiv [BM] \equiv [CM] \equiv [DM]$ .
20. Trasești segmentul oarecare  $[AB]$ . onstruiești mediatoarea acestuia cu ajutorul unui compas și notezi mijlocul segmentului  $[AB]$  cu  $M$ . Alegeți apoi pe mediatoarea punctele oarecare  $C$  și  $D$  de o parte a segmentului  $[AB]$  și punctele  $E$  și  $F$  de cealaltă parte a segmentului  $[AB]$ , astfel încât lungimile  $CM$ ,  $DM$ ,  $EM$  și  $FM$  să fie toate diferite. Uniți punctul  $C$  cu  $A$  respectiv cu  $B$  prin segmente trasate cu linie într-o anumită culoare. Măsurați segmentele  $[CA]$  și  $[CB]$  pentru a constata că punctul  $C$  este egal depărtat de capetele segmentului  $[AB]$ . Repetați exercițiul, de fiecare dată cu altă culoare în cazul punctelor  $D$ ,  $E$  și  $F$ , pentru a constata că fiecare dintre acestea este egal depărtat de cele două capete ale segmentului inițial.
21. Trasești două drepte secante oblice (adică neperpendiculare)  $a$  și  $b$  și notezi punctul lor de intersecție cu  $O$ . Alegeți pe dreapta  $a$  punctele  $A$  și  $B$  astfel încât  $AO = BO = 5$  cm, iar pe dreapta  $b$  punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $CO = DO = 3$  cm. Trasești apoi cu linie întreruptă segmentele  $[AC]$ ,  $[CB]$ ,  $[BD]$  și  $[DA]$ . Ce observați, cum par să stea una față de cealaltă dreptele  $AC$  și  $BD$ ? Dar dreptele  $BC$  și  $AD$ ?
22. Trasești două drepte secante oblice (neperpendicular)  $a$  și  $b$  și notezi punctul lor de intersecție cu  $P$ . Alegeți pe dreapta  $a$  punctele  $A$  și  $B$  iar pe dreapta  $b$  punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $[PA] \equiv [PB] \equiv [PC] \equiv [PD]$ , doar cu utilizarea unui compas. Trasești apoi cu linie întreruptă

segmentele  $[AC]$ ,  $[CB]$ ,  $[BD]$  și  $[DA]$ . Folosind compasul verificați apoi dacă  $[AC] \equiv [BD]$ , respectiv dacă  $[BC] \equiv [AD]$ . Oare știți cum se numește figura trasată cu linie întreruptă?

**23.** Trasați cu un liniar două drepte paralele  $a \parallel b$  și o dreaptă secantă  $d$ , oblică față de acestea, care le intersectează în punctele  $A$  respectiv  $B$ . Construiți apoi pe dreapta  $a$  punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $[AC] \equiv [AD] \equiv [AB]$ , iar pe dreapta  $b$  punctele  $E$  și  $F$  astfel încât  $[BE] \equiv [BF] \equiv [AB]$ . Trasați apoi cu linii întrerupte segmentele de dreaptă  $[CE]$ ,  $[CF]$ ,  $[DE]$  și  $[DF]$ . Observăm că două dintre acestea sunt ... cu segmentul  $[AB]$ , respectiv celelalte două sunt ... cu segmentul  $[AB]$  (găsiți cuvintele potrivite și scrieți care sunt cele trei segmente cu o proprietate comună).

**24.** Trasați dreptele  $a$ ,  $b$  și  $c$ , concurente în punctul  $P$ . **a)** Pe dreapta  $a$  alegeți punctele  $A$  și  $B$  astfel încât segmentele  $[AP] \equiv [BP]$  să aibă lungimea de 2 cm; pe dreapta  $b$  alegeți punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $[CP] \equiv [DP]$  de lungime 3 cm; în mod similar, pe dreapta  $c$  alegeți punctele  $E$  și  $F$  astfel încât segmentele  $[EP] \equiv [FP]$  să aibă lungimea egală cu 4 cm. **b)** care este simetricul punctului  $A$  față de centrul de simetrie  $P$ ? Dar simetricul ui  $D$  față de  $P$ ? **c)** Trasați cu linii întrerupte laturile triunghiurilor  $ACE$  respectiv  $BDF$ . Cum puteți descrie cele două triunghiuri unul față de celălalt?

### III. UNGHIURI

**25.** Trasați două drepte intersectate  $a$  și  $b$  și notați cu  $M$  punctul lor de intersecție. Notați cu  $M_1$ ;  $M_2$ ;  $M_3$  și  $M_4$  cele patru unghiuri formate, în sensul acelor de ceasornic. Măsurați pe rând cele patru unghiuri și treceți măsurile aflate în interiorul fiecăruia. Ce observați și cum explicați acest fapt? Cum se numesc împreună unghiurile  $M_1$  și  $M_3$ ? Dar unghiurile  $M_2$  și  $M_4$ ?

**26.** Trasați dreptele  $a$ ,  $b$  și  $c$ , concurente în punctul  $P$ , astfel încât cele șase unghiuri formate să nu fie toate congruente. Notați respectivele

unghiuri în sensul acelor de ceasornic  $P_1$ ;  $P_2$ ; ...;  $P_6$  și precizați care dintre acestea sunt totuși congruente.

**27.** Trasați dreptele  $a$ ,  $b$  și  $c$ , concurente în punctul  $P$ , astfel încât cele șase unghiuri formate să nu fie toate congruente, dar dreptele  $a$  și  $b$  să fie perpendiculare ( $a \perp b$ ). **a)** Notați cele șase unghiuri în sensul acelor de ceasornic  $P_1$ ;  $P_2$ ; ...;  $P_6$  și precizați care sunt cele două unghiuri drepte. **b)** Scrieți două unghiuri consecutive care au împreună  $90^\circ$ , iar apoi încă alte două la fel. Măsurați două dintre acestea și verificați dacă suma măsurilor lor este într-adevăr egală cu  $90^\circ$ .

**28.** Construiți cu ajutorul unui raportor câte un unghi cu măsura rezultată din următoarele situații: **a)** aruncați cu două zaruri și luați numărul de două cifre format de cele două (luați ambele variante, de pildă la numerele 4 și 6 luați și  $46^\circ$ , dar și  $64^\circ$ ); **b)** luați anii nașterii părinților, doar cifrele zecilor și ale unităților (de pildă, la 1987 construiți un unghi de  $87^\circ$ ); **c)** luați același exercițiu la anii de naștere ai bunicilor; **d)** luați măsura de  $180^\circ - \overline{ab}^\circ$ , unde  $\overline{ab}$  reprezintă vârsta voastră (sigur unghi obtuz); **e)** luați măsura de  $\overline{abc}^\circ$ , acest număr reprezentând anul în care a fost învins Decebal și a început transformarea Daciei în provincie romană; **f)** luați măsura de  $\overline{ab}0^\circ$ , unde  $\overline{ab}$  reprezintă vârsta voastră; **g)** construiți în final un unghi supraobtuz cu măsura de  $234^\circ$ .

**29.** Trasați dreptele  $a$ ,  $b$  și  $c$ , concurente în punctul  $P$ , astfel încât cele șase unghiuri formate să nu fie toate congruente. Măsurați apoi fiecare din cele șase unghiuri formate și consemnați măsura stabilită în interiorul fiecăruia. Verificați în final dacă suma tuturor măsurilor obținute dacă cât ar trebui, adică  $360^\circ$  (la măsurarea unghiurilor pot apărea erori).

**30.** Trasați dreptele  $a$ ,  $b$  și  $c$ , concurente în punctul  $P$ , astfel încât cele șase unghiuri formate să nu fie toate congruente, și notați cele șase unghiuri în sensul acelor de ceasornic  $P_1$ ;  $P_2$ ; ...;  $P_6$ . Fără a măsura unghiurile (fără raportor) construiți apoi separat trei unghiuri individuale, astfel încât fiecare să fie congruente cu câte două din unghiurile inițiale (construcții folosind doar liniarul și compasul).

31. Trasați cu un liniar două drepte paralele. **a)** Construiți o dreaptă secantă la acestea, care să facă cu ele un unghi de  $54^\circ$  și completați această măsură în interiorul tuturor unghiurilor din figură la care se potrivește. **b)** Unghiurile la care n-ați completat o măsură sunt toate obtuze. Determinați măsura acestora fără a folosi raportorul.

32. Trasați cu un liniar trei drepte paralele echidistante  $a \parallel b \parallel c$  (echidistante, adică cu aceeași distanță între  $a$  și  $b$  ca și între  $b$  și  $c$ ; folosiți pentru aceasta exact lățimea liniarului). **a)** Trasați o secantă  $d$  care să formeze cu cele trei drepte paralele unghiuri de  $75^\circ$ ; **b)** Notăți cu  $A$ ,  $B$  respectiv  $C$  punctele de intersecție ale dreptei  $d$  cu cele trei paralele ( $A$  pe dreapta  $a$  etc.); ce observați în legătură cu segmentele  $[AB]$  și  $[BC]$ ? Verificați prin măsurare, dar și fără, cu ajutorul compasului. **c)** Repetați exercițiul cu dreapta secantă  $d'$  care formează cu dreptele inițiale unghiuri cu măsura de  $36^\circ$ .

33. Trasați trei unghiuri separate, tustrele de câte  $72^\circ$ . Construiți apoi la fiecare bisectoarea: la primul folosind raportorul; la al doilea folosind compasul prin metoda tradițională; la al treilea tot cu compasul, dar printr-o metodă diferită.

34. **a)** Construiți un unghi ascuțit "la întâmplare" și trasați apoi bisectoarea acestuia fără a-l măsura. **b)** Repetați exercițiul, construind bisectoarea unui unghi obtuz oarecare.

35. Construiți un unghi drept  $\widehat{AOB}$  cu ajutorul echerului, iar apoi trasați o semidreaptă interioară acestuia  $[Oc$  (unde  $O$  este vârful unghiului), astfel încât cele două unghiuri formate  $\widehat{AOc}$  și  $\widehat{COB}$  să nu fie congruente. Construiți apoi cu compasul bisectoarele unghiurilor  $\widehat{AOc}$  și  $\widehat{COB}$ , pe care le notăm cu  $[Om$ , respectiv cu  $[On$ . Măsurați în final unghiul  $\widehat{mOn}$  format de cele două bisectoare și consemnați rezultatul.

36. Trasați o dreaptă  $d$  iar pe aceasta apegeți un punct  $P$ . Construiți apoi o semidreaptă  $[Pa$  oblică față de dreapta  $d$ . Observăm că aceasta formează cu dreapta  $d$  două unghiuri, unul ascuțit și unul obtuz. Construiți cu compasul pe rând bisectoarele celor două unghiuri, pe

care le notați  $[Pm$  și respectiv  $[Pn$ , ambele trasate cu linie întreruptă. Măsurați unghiul  $\widehat{mPn}$ ; ce observați? Verificați rezultatul cu ajutorul unui echer. Se potrivește cu măsurătoarea?

37. Trasați două drepte intersectate  $a$  și  $b$  și notați cu  $M$  punctul lor de intersecție. Notați cu  $M_1$ ;  $M_2$ ;  $M_3$  și  $M_4$  cele patru unghiuri formate, în sensul acelor de ceasornic. Construiți cu compasul bisectoarele celor patru unghiuri. **a)** Ce observați legat de bisectoarele unghiurilor opuse la vârf ( $M_1$  și  $M_3$  respectiv  $M_2$  și  $M_4$ )? **b)** Ce observați legat de bisectoarele a două unghiuri consecutive (de exemplu  $M_1$  și  $M_2$ )? Verificați bănuiala măsurând unghiul dintre ele cu ajutorul raportorului, dar și fără măsurătoare, cu ajutorul echerului. Consemnați rezultatul.

38. Considerăm un unghi  $\widehat{AOB}$ . Se numesc **trisectoare** ale unghiului două semidrepte care îl împart, în trei unghiuri congruente (adică în trei părți egale). Desigur, cele două semidrepte pleacă din vârful unghiului și sunt situate în interiorul acestuia (putem nota cele două trisectoare cu  $[Om$  respectiv  $[On$ , dar nu este obligatoriu). **a)** Construiți un unghi cu măsura de  $72^\circ$  și trasați trisectoarele acestuia; **b)** În mod similar, construiți un unghi cu măsura de  $138^\circ$  și trasați trisectoarele sale.

39. Construiți un unghi de  $96^\circ$  și împărțiți-l în patru unghiuri congruente, cu ajutorul a trei semidrepte ce pleacă din vârful său.

40. Construiți un unghi de  $120^\circ$  și împărțiți-l în cinci unghiuri congruente, prin patru semidrepte interioare ce își au originea în vârful său.

41. Construiți un unghi obtuz și împărțiți-l în patru unghiuri congruente fără a folosi raportorul (fără a măsura unghiul). Repetați construcția împărțind în patru unghiuri inițial ascuțit.

42. Trasați un unghi oarecare pe o coală de hârtie, iar apoi construiți bisectoarele sale fără a folosi nici raportorul, nici compasul.

43. **Bonus!** Luați (dacă găsiți) sau confecționați o bucată de hârtie care să nu aibă deloc margini drepte (rupeți, nu tăiați, marginile unei coli A4). Fără nici un instrument (nici liniar, nici foarfecă etc.) confecționați din aceasta un **liniar**, respectiv un **echer** pentru construcții geometrice.