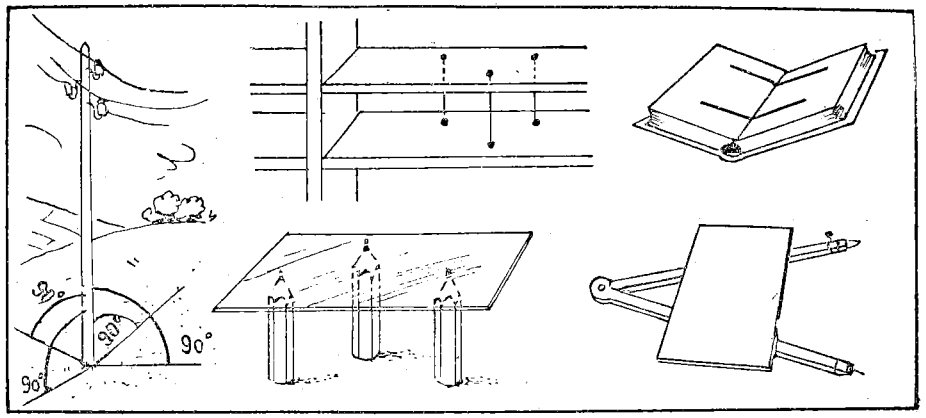
PARTEA A DOUA

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU



CAPITOLUL VII

INTRODUCERE

139. **Planul**. Planul este suprafața cea mai simplă. Suprafața unui geam, a unei foi de hîrtie netede, a unei scînduri bine date la rindea reprezintă porțiuni de suprafață plană. În loc de *suprafață plană* se spune scurt *plan*.

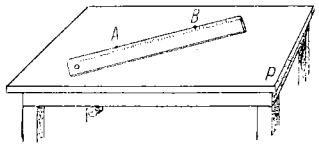


Fig. 261

Considerăm planul P determinat de suprafața mesei (fig. 261) și două puncte A și B din acest plan. Dacă așezăm o linie astfel încît marginea ei să treacă prin punctele A și B, ea se lipește de masă, ceea ce înseamnă că toate punctele dreptei AB sînt conținute în plan. Acest lucru este adevărat oricare ar fi punctele A, B de pe suprafața mesei. Deci, planul are următoarea însușire:

Dacă unim două puncte oarecare ale unui plan printr-o dreaptă, acea dreaptă este conținută în plan.

Planul este nelimitat. Pentru a reprezenta un plan printr-un desen, se ia numai o parte din el, de obicei un dreptunghi, care se desenează ca în figura 262 (un paralelogram).

Planul poate aluneca pe el însuși. De exemplu, la călcatul rufelor, fundul fierului de călcat și masa pe care se calcă reprezintă unul și același plan care alunecă pe el însuși.

140. **Determinarea planului.** Se știe că două puncte determină o dreaptă, ceea ce înseamnă că prin două puncte se poate

duce o dreaptă și numai una. În cele ce urmează vom da diferite mijloace de a determina un plan.

1. Considerăm două drepte concurente (un compas desfăcut). Orice poziție am da acestor drepte, există un plan și numai unul singur care să le conțină (fig. 262). Deci:

Două drepte concurente determină un plan.

De aici rezultă un mijloc practic de a obține o suprafață plană. Considerăm, de exemplu, o ladă cu nisip (fig. 263), în care suprafața nisipului

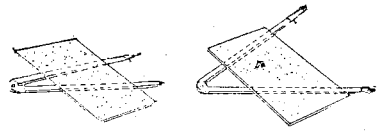


Fig. 262

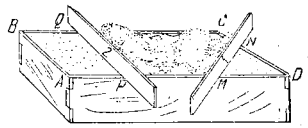


Fig. 263

are o formă oarecare și se ridică mai sus decît marginile lăzii. Așezăm o linie *1*, astfel încît ea să se sprijine pe două muchii concurente ale lăzii AD și DC. Cînd mișcăm linia, partea din suprafața nisipului peste care trece devine plană. În adevăr, dreptele AD, DC determină un plan. Marginea liniei, trecînd prin punctele M și N, este conținută în acest plan, deci toate punctele ei se mișcă în același plan.

Cînd o dreaptă alunecă pe două drepte concurente, ea descrie un plan.

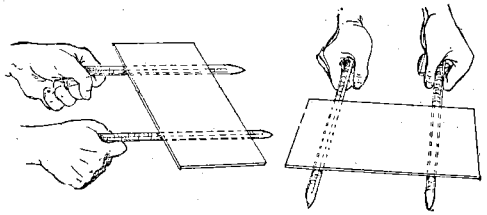


Fig. 264

2. Considerăm două drepte paralele (fig. 264). Există totdeauna un plan și numai unul care să treacă prin ele. Deci:

Două drepte paralele determină un plan.

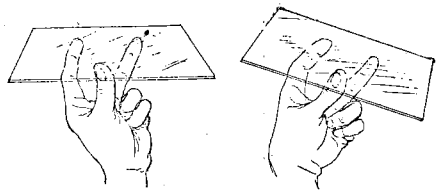


Fig. 265

Și această proprietate a planului ne dă un mijloc de a obține o suprafață plană. Dacă mișcăm (fig. 263) o linie *2*, astfel încît ea să alunece pe muchiile paralele AD, BC, suprafața nisipului peste care a trecut linia devine plană.

Cînd o dreaptă alunecă pe două drepte paralele, ea descrie un plan.

3. Considerăm (fig. 265) trei puncte nesituate în linie dreaptă (vîrfurile a trei degete). Există un plan și numai unul care să treacă prin ele. Deci:

Trei puncte nesituate în linie dreaptă determină un plan.

Cînd punctele sînt situate în linie dreaptă, ele *nu* determină un plan. Astfel, dacă luăm trei puncte A, B, C (fig. 266) de pe cotorul unei cărți, putem da copertei cărții, care reprezintă un plan, diferite poziții, astfel ca ea să treacă mereu prin aceste puncte. Prin aceste trei puncte, care sînt situate în linie dreaptă, putem duce oricîte plane vrem.

141. **Poziția unei drepte față de un plan.** O dreaptă poate să aibă față de un plan una din cele trei poziții indicate în figura 267.

1. Dreapta nu are *nici un punct* comun cu planul. În acest caz se spune că dreapta este *paralelă* cu planul (fig. 267 *a*).

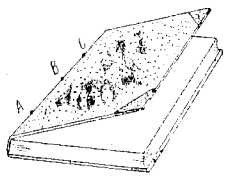


Fig. 266

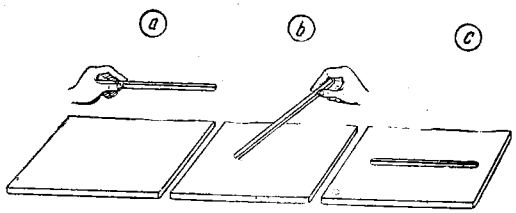


Fig. 267

2. Dreapta are *un singur punct* comun cu planul. În acest caz se spune că dreapta *taie* sau *înțeapă* planul (fig. 267 *b*).

3. Toate punctele dreptei sînt conținute în plan. În acest caz se spune că dreapta este *conținută* în plan (fig. 267 *c*).

142. **Construcția unei drepte paralele cu un plan.** Pentru ca o dreaptă să fie paralelă cu un plan, este suficient ca ea să fie paralelă cu o dreaptă din plan. De exemplu, în figura 268, dreapta a este paralelă cu planul P, pentru că este paralelă cu dreapta a' din plan. Dreapta b este paralelă cu planul P, pentru că este paralelă cu dreapta b' din plan ș.a.m.d. De aici rezultă că, pentru a construi o dreaptă paralelă cu un plan, n-avem decît să ducem o dreaptă paralelă cu o dreaptă oarecare din plan.

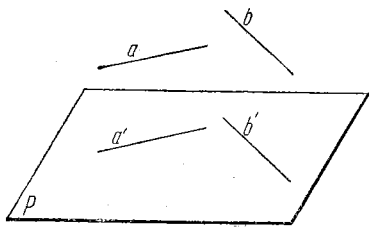


Fig. 268

143. **Poziția relativă a două drepte.** În geometria plană, două drepte sînt sau paralele (nici un punct comun) sau concurente (un punct comun). Cînd dreptele nu sînt în același plan, se poate ca ele să nu aibă nici un punct comun și totuși să nu

fie paralele, cum ar fi, de exemplu, șoseaua și calea ferată indicate în figura 269. Astfel de drepte se numesc *drepte oarecare*. Așadar:

Două drepte din spațiu pot fi una față de alta:

1. Concurente (un punct comun).

2. Paralele (nici un punct comun, dar dreptele sînt în același plan).

3. Oarecare (nici un punct comun și dreptele *nu* sînt în același plan).

144. **Drepte paralele.** În spațiu, dreptele paralele au aceeași însușire ca și în plan.

1. *Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la acea dreaptă și numai una.*

În adevăr, să considerăm o dreaptă d și un punct exterior A (fig. 270). Dreapta d și punctul A determină un plan P.

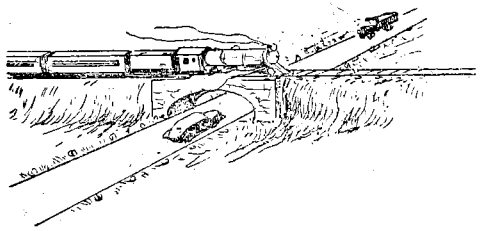


Fig. 269

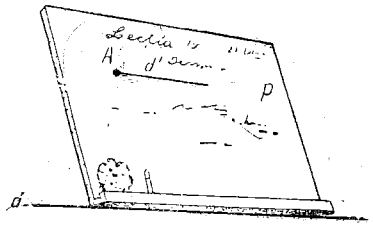


Fig. 270

(Ne închipuim o tablă așezată astfel încît să conțină dreapta d și punctul A).

Dacă luăm planul P ca plan de desen, putem duce prin A o singură dreaptă d' care să fie paralelă cu d (postulatul lui Euclid). Altă dreaptă paralelă cu d care să treacă prin punctul A nu există.

2. *Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele.*

De exemplu (fig. 271), dacă construim $d' \parallel d$ și $d'' \parallel d'$, dreapta d'' va fi paralelă și cu dreapta d.

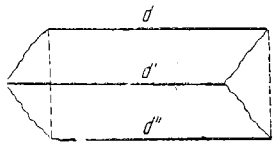


Fig. 271

145. **Unghiul a două drepte.** În spațiu, ca și în plan, fiecare dreaptă reprezintă o anumită direcție. Pentru a putea compara două direcții, trebuie să cunoaștem unghiul format de acele drepte și în cazul cînd dreptele nu sînt în același plan.

Fie (fig. 272) MN și BC două drepte *oarecare*. Luăm un punct oarecare de pe una din aceste drepte, de exemplu punctul C, și ducem prin el o dreaptă CE paralelă cu MN. Unghiul BCE ce se formează astfel este unghiul celor două drepte.

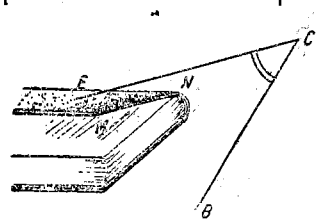


Fig. 272

Cînd acest unghi este drept, se spune că dreptele sînt *perpendiculare*.

146. **Poziția relativă a două plane.** Două plane pot avea unul față de altul cele trei poziții indicate în figura 273.

1. Planele nu au nici un punct comun (fig. 273 *a*). În acest caz se spune că planele sînt *paralele*.

2. Planele au o dreaptă comună (fig. 273 *b*). În acest caz se spune că planele sînt *concurente*.

3. Toate punctele celor două plane coincid (fig. 273 *c*). În acest caz se spune că planele sînt *confundate*. Propriu-zis, în acest caz, cele două plane formează unul și același plan

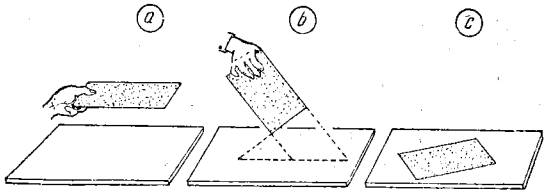


Fig. 273

147. **Plane paralele.** *1.* Fie P (fig. 274 *a*) un plan dat și A un punct exterior planului. Dacă prin punctul A ducem mai

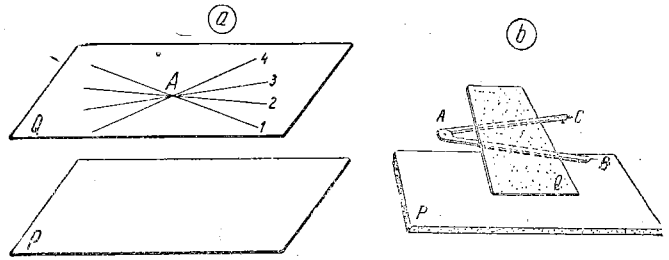


Fig. 274

multe drepte (*1, 2, 3,...*) paralele cu planul P, ele vor fi conținute toate într-un plan Q, care este paralel cu P.

Toate dreptele care trec prin același punct și sînt paralele cu un plan dat sînt conținute într-un plan paralel cu cel dat.

De aici rezultă că, pentru a construi un plan care să treacă printr-un punct A (fig. 274 *b*) exterior unui plan P și să fie paralel cu P, putem proceda astfel: ducem prin A două drepte AB, AC paralele cu P. Planul Q determinat de aceste drepte este planul căutat.

2. Considerăm două plane paralele și un al treilea plan care le taie, de exemplu două rafturi și un perete lateral al unui dulap (fig. 275). Se observă că dreptele d și d', după care planul al treilea taie cele două plane paralele, sînt *paralele*.

Pentru a demonstra aceasta, considerăm două plane paralele P și P' (fig. 276) și un al treilea plan Q care le taie. Se formează două drepte d și d'. Aceste drepte sînt în același plan (Q),

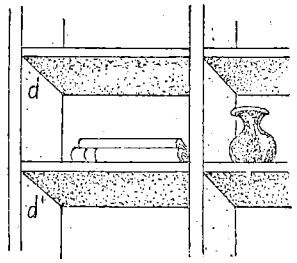


Fig. 275

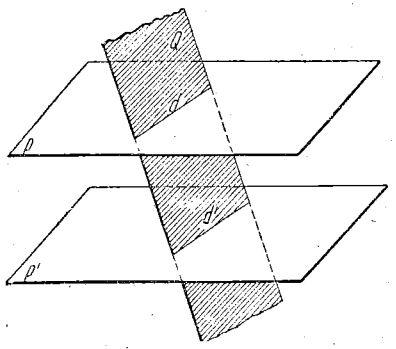


Fig. 276

deci ele nu pot fi decît sau concurente, sau paralele. Dacă dreptele ar fi concurente, punctul în care se taie ar fi un punct comun celor două plane P și P'. Dar planele P și P' nu pot avea un punct comun, căci le-am presupus paralele. Rezultă că $d \parallel d'$. Deci:

Cînd două plane paralele sînt tăiate de un al treilea plan, dreptele de intersecție sînt paralele.

3. Considerăm două plane paralele P și Q (fig. 277 *a*) și două drepte paralele d și d' care le taie. Planele determină pe aceste drepte două segmente AB, $A'B'$. Să comparăm aceste segmente, care par a fi egale.

Dreptele paralele d și d' determină un plan R care taie planul P după dreapta AA', iar planul Q după dreapta BB'. Aceste drepte sînt paralele, după cum s-a arătat în teorema precedentă. Rezultă că patrulaterul $AA'B'B$ este un paralelogram, deci $AB = A'B'$. Deci:

Segmente de dreaptă paralele cuprinse între plane paralele sînt egale.

Această teoremă poate fi apropiată de teorema: Paralele cuprinse între paralele sînt egale.

Exemplu: Să ne închipuim o legătură de șipci de lungimi diferite (fig. 277 *b*). Dacă facem două tăieturi de ferăstrău paralele, obținem șipci egale.

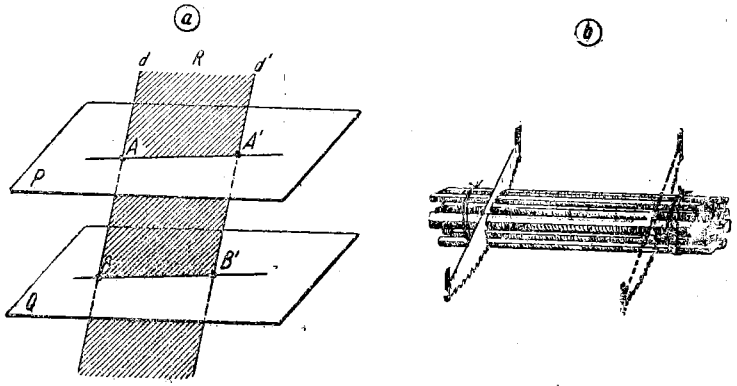


Fig 277

148. **Dreaptă perpendiculară pe un plan.** Un stîlp de telegraf sau un copac vertical reprezintă o dreaptă perpendiculară pe suprafața orizontală a terenului. Oricine știe ce înseamnă a bate un cui drept (nu oblic) într-o scîndură (fig. 278). Cuiul *1* reprezintă o dreaptă perpendiculară pe planul scîndurii.

Pentru a arăta cînd o dreaptă este perpendiculară pe un plan, considerăm o vergea *d* perpendiculară pe planul mesei *P* (fig. 279). Așezăm un echer *1* ca în figură. Cateta *AC* coincide

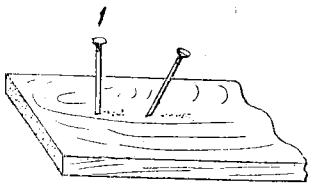


Fig. 278

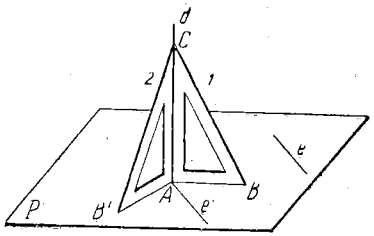


Fig. 279

cu o parte din *d*, iar cateta *AB* este conținută în planul *P*. Dreapta *d* este perpendiculară pe dreapta *AB*. Dacă rotim echerul în jurul dreptei *d*, de exemplu pînă în poziția *2*, cateta *AC* coincide tot timpul cu o parte din *d*, iar cealaltă catetă, *AB*

este tot timpul conținută în planul *P*. Se vede astfel că dreapta *d* este perpendiculară pe toate dreptele din planul *P* care trec prin piciorul ei *A*.

Fie acum o dreaptă oarecare *e* din planul *P*. Pentru a obține unghiul format de dreptele *d* și *e*, ducem prin punctul *A* o dreaptă *e'* paralelă cu *e*. Dreapta *d* va fi perpendiculară pe *e'*, deci și pe *e*. Ajungem astfel la următoarea definiție:

O dreaptă este perpendiculară pe un plan cînd este perpendiculară pe toate dreptele din acel plan.

Cînd o dreaptă *nu* este perpendiculară pe un plan, se spune că ea este *oblică* față de acel plan.

149. **Condiția ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan.** Luăm o foaie de carton dreptunghiulară (fig. 280 *a*) și o așezăm

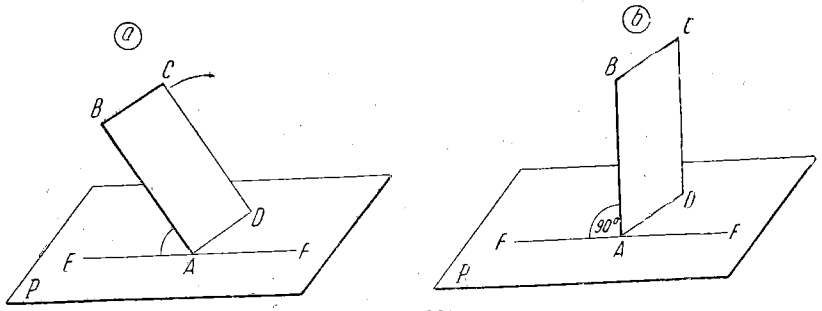


Fig. 280

astfel încît o latură, *AD*, să fie conținută în planul mesei *P*, iar cealaltă latură, *AB*, să fie oblică față de planul *P*. Există în planul *P* o dreaptă (*AD*) pe care dreapta *AB* să fie perpendiculară. Totuși, dreapta *AB* nu este perpendiculară pe plan, căci ea nu este perpendiculară pe toate dreptele din plan. De exemplu, unghiul *BAE* este ascuțit. Rotim foaia de carton în jurul dreptei *AD* în sensul indicat de săgeată. Cîtă vreme unghiul *EAB* este ascuțit, dreapta *AB* rămîne oblică față de planul *P*. Abia cînd acest unghi devine drept (fig. 280 *b*), dreapta *AB* este perpendiculară pe planul *P*. Observăm că pentru aceasta a fost suficient ca *AB* să fie perpendiculară pe două drepte concurente din planul *P*, și anume pe dreptele *EF* și *AD*. Deci:

Pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan, este suficient ca ea să fie perpendiculară pe două drepte concurente din plan.

150. **Distanța dintre două plane paralele.** Considerăm două plane paralele P și P' (fig. 281). Ele pot fi mai apropiate sau mai depărtate unul de altul. Pentru a arăta ce se înțelege prin distanța de la un plan la altul, luăm în planul P mai multe puncte A, B, C,... și coborîm din ele cîte o perpendiculară pe planul P'. Observăm că aceste drepte sînt paralele între ele. Fiind și cuprinse între plane paralele, segmentele AA', BB', CC',.... vor fi egale între ele. Fiecare din ele reprezintă distanța dintre planele P și P'

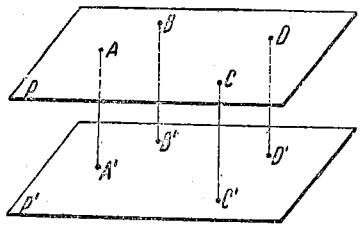


Fig. 281

151. **Proiecții.** Proiecția unui punct pe un plan este piciorul perpendicularei coborîte din acel punct pe plan. De exemplu, în figura 282, punctul m este proiecția punctului M pe planul P.

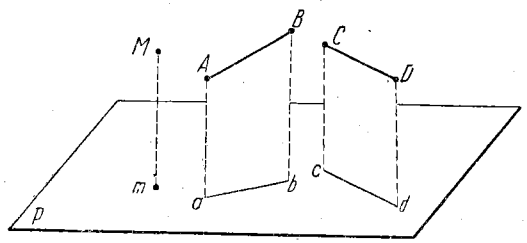


Fig. 282

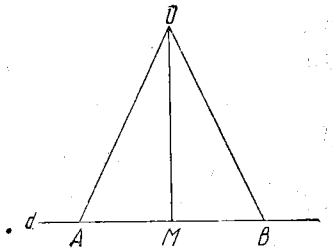


Fig. 283

Proiecția unei drepte pe un plan este dreapta ce se obține unind proiecțiile a două puncte oarecare ale ei. De exemplu, dreapta ab (fig. 282) este proiecția dreptei AB pe planul P, dreapta cd este proiecția dreptei CD pe același plan.

Se observă că proiecția unui segment este mai mică decît segmentul sau egală cu el, niciodată mai mare.

152. **Perpendiculare și oblice.** Știm din geometria plană că, dacă ducem dintr-un punct O (fig. 283) spre o dreaptă o perpendiculară OM și o oblică OA, perpendiculara este mai scurtă decît oblica. De asemenea, dacă ducem două oblice egale, $OA = OB$, și perpendiculara OM, atunci $MA = MB$, căci triunghiul AOB este isoscel, deci înălțimea sa (OM) este și mediană. Reciproc, dacă $MA = MB$, atunci și $OA = OB$, căci MO este mediatoarea segmentului AB. Dar MA este proiecția

lui OA, și MB este proiecția lui OB. Deci, putem spune că oblice egale au proiecții egale și reciproc.

Să studiem problema analogă în spațiu.

1. Considerăm un plan P și un punct exterior O (fig. 284). Ducem din O spre planul P o perpendiculară OM și o oblică OA. Dreptele OM și OA, fiind concurente, sînt în același plan Q, care taie planul P după dreapta MA. Dreapta OM, fiind perpendiculară pe planul P, va fi perpendiculară pe MA, iar OA este oblică față de MA. Rezultă că $OM < OA$.

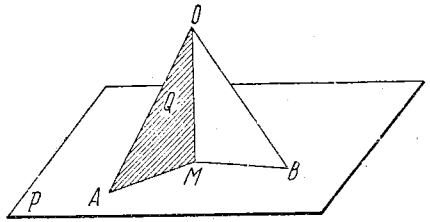


Fig. 284

Dacă ducem dintr-un punct pe un plan o perpendiculară și o oblică, perpendiculara este mai scurtă decît oblica.

2. Considerăm o altă oblică, OB. Dacă $OB = OA$, atunci $\Delta\, OMA = \Delta\, OMB$ (ele au o catetă comună și ipotenuze egale), deci $MA = MB$.

Reciproc, dacă $MA = MB$, din nou $\Delta OMA = \Delta OMB$ (ele au catetele egale două cîte două), deci $OA = OB$.

Dar MA, MB sînt proiecțiile segmentelor OA, OB pe planul P. Deci:

Oblice egale au proiecții egale și, reciproc, oblice care au proiecții egale sînt egale.

Se înțelege că oblicele sînt duse din același punct pe același plan și că proiecțiile se iau pe acel plan.

153. **Distanța de la un punct la un plan.** Prin distanța de la un punct la un plan se înțelege lungimea perpendicularei coborîte din acel punct pe plan. De exemplu, în figura 284, segmentul OM reprezintă distanța de la punctul O la planul P. Acest segment este mai scurt decît oricare alt segment care ar uni punctul O cu un punct din plan.

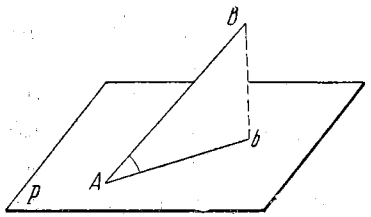


Fig. 285

154. **Unghiul unei drepte cu un plan.** Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul pe care îl face dreapta cu proiecția ei pe acel plan. De exemplu, în figura 285 Ab este proiecția drep-

tei AB pe planul P. Unghiul format de dreapta AB cu planul P este unghiul BAb.

Acest unghi este mai mic decît unghiul format de dreapta AB cu oricare altă dreaptă din plan.

155. **Unghi diedru**[1]. O porțiune din plan limitată de o dreaptă se numește *semiplan*. Orice dreaptă dusă într-un plan împarte planul în două semiplane (fig. 286).

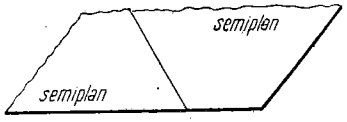


Fig. 286

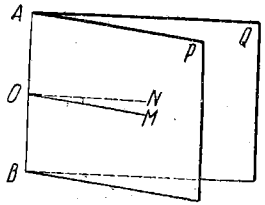


Fig. 287

Să considerăm o foaie de hîrtie îndoită — așa cum arată figura 287. Fiecare din cele două părți ale ei reprezintă un semiplan mărginit de dreapta AB. Se spune că aceste două semiplane formează un *unghi diedru*.

Un unghi diedru este format din două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.

În loc de unghi diedru se spune scurt *diedru*. Cele două semiplane se numesc *fețele* diedrului, iar dreapta comună celor două semiplane se numește *muchia diedrului*.

Așa cum unghiul a două semidrepte arată cît de înclinată este o dreaptă față de cealaltă, unghiul diedru arată cît de înclinat este un plan față de altul.

156. **Unghi plan corespunzător unui unghi diedru.** Mărimea unui unghi diedru se măsoară cu ajutorul unui unghi plan. Fie O (fig. 287) un punct oarecare de pe muchia unui diedru. Ducem în semiplanele P și Q cîte o semidreaptă OM, ON perpendiculară pe AB. Unghiul MON se numește *unghiul plan* corespunzător acelui unghi diedru. Acest unghi se poate obține tăind diedrul cu un plan perpendicular pe muchia lui.

Unghiul diedru are atîtea grade, minute și secunde cîte are unghiul plan corespunzător. De exemplu, dacă $\widehat{MON} = 30°$, unghiul diedru format de semiplanele P și Q are tot 30°.

Dacă unghiul plan corespunzător unui unghi diedru este drept, se spune că cele două plane sînt *perpendiculare* (fig. 288).

[1] *di-edru* — două fețe.

Exemplu: Figura 289 arată o carte deschisă formînd un diedru; oricare dintre unghiurile notate cu AOB este unghiul plan corespunzător.

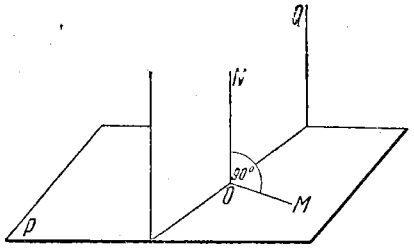


Fig. 288

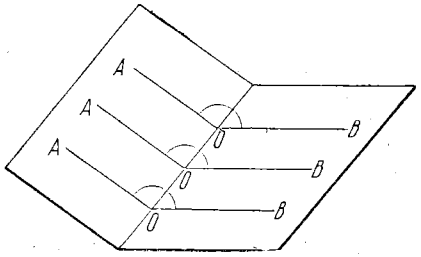


Fig. 289

157. **Reprezentarea corpurilor prin desen cotat.** În tehnică, pentru a arăta ce formă are un corp, acel corp se reprezintă prin proiecția sa pe mai multe plane. Diversele lungimi se indică prin numere, numite *cote*. Acest procedeu se numește *desen cotat*.

Figura 290 *a* reprezintă un penal. Pentru a da o descriere completă acestui obiect, s-au dat trei *vederi* ale lui. Figura 290 *b* reprezintă *vederea din față*, care este proiecția penalului pe un plan paralel cu planul $ABCD$. Numărul 180 arată că lungimea penalului este de 180 mm, iar numerele

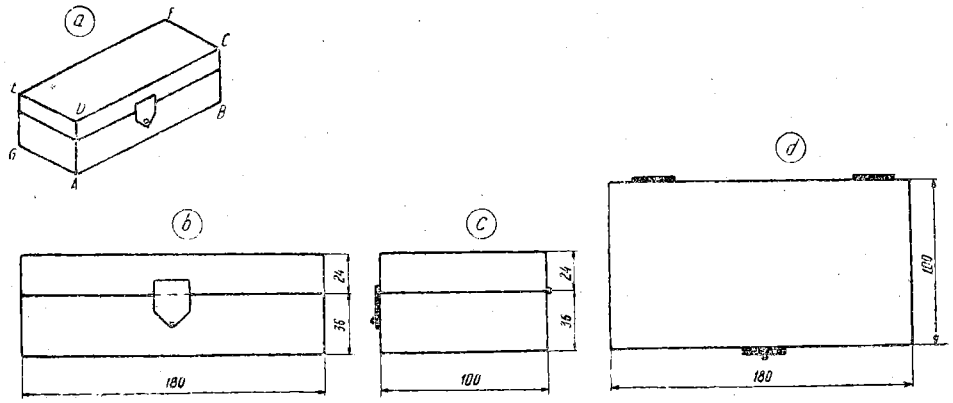


Fig. 290

36 și 24 arată că înălțimea cutiei propriu-zise și a capacului sînt de 36 mm, respectiv de 24 mm. Figura 290 *c* reprezintă o *vedere laterală* a aceluiași penal, care este proiecția lui pe un plan paralel cu fața $ADEG$. Figura 290 *d* reprezintă *vederea de sus* a aceluiași penal, adică proiecția lui pe un plan paralel cu fața $CDEF$.

Aceste trei vederi dau o descriere completă a penalului, așa că orice lucrător poate să-l confecționeze fără nici o explicație.

Figura 291 reprezintă un mosor (o bobină), în vedere laterală și de sus.

158. **Reprezentarea corpurilor în perspectivă.** În geometrie, corpurile se reprezintă prin niște figuri asemănătoare cu fotografiile lor. Aceste figuri se obțin după următoarea regulă:

Se ia ca plan de desen un plan vertical. Segmentele paralele cu planul de desen sînt reprezentate în mărime adevărată, iar cele perpendiculare pe planul de desen sînt reduse într-un anumit raport (de exemplu 1 : 2 sau 1 : 3) și formează cu orizontala un unghi anumit (de exemplu 30° sau 45°). Raportul de reducere și unghiul format de o dreaptă perpendiculară pe planul de desen cu orizontala se indică între paranteze. De exemplu,

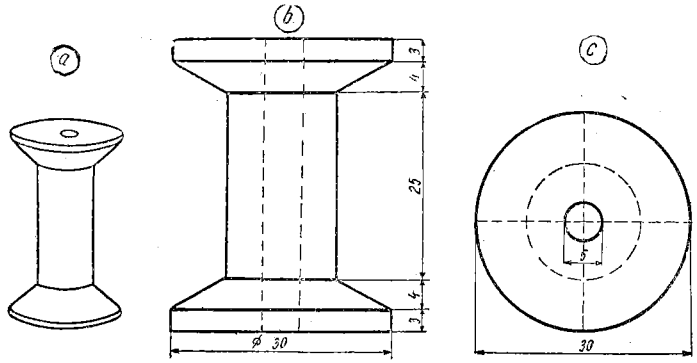


Fig. 291

pentru a arăta că orice segment perpendicular pe planul de desen este redus la jumătate și formează cu orizontala un unghi de 30°, se scrie: $\left(\frac{1}{2}, 30°\right)$.

În această reprezentare, dreptele paralele apar tot ca drepte paralele.

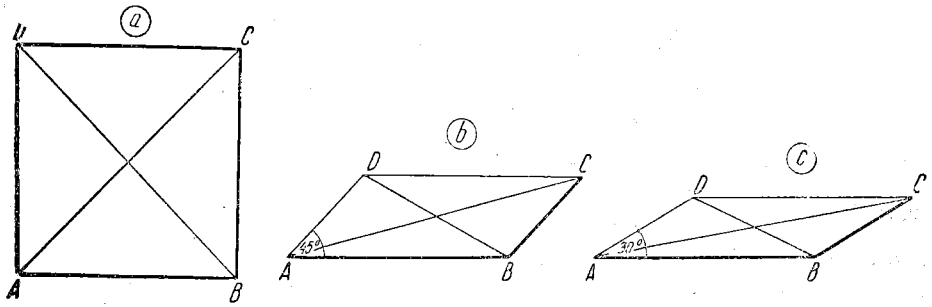


Fig. 292

159. **Exemple.** *1.* În figura 292 *a* se vede un pătrat în formă și mărime adevărată. Figura 292 *b* reprezintă același pătrat $\left(\frac{1}{2}, 45°\right)$, planul de desen fiind paralel cu latura AB a pătratului. Latura AB apare în mărime adevărată, iar în locul unghiului drept A apare un unghi de 45°. Figura 292 *c* reprezintă același pătrat $\left(\frac{1}{2}, 30°\right)$, planul de desen fiind același.

2. Figura 293 *a* reprezintă un triunghi echilateral. Figura 293 *b* reprezintă același triunghi $\left(\frac{1}{2}, 45°\right)$, planul de desen fiind paralel cu latura AB (înălțimea CF face cu latura AB un unghi de 45° și este redusă la jumătate).

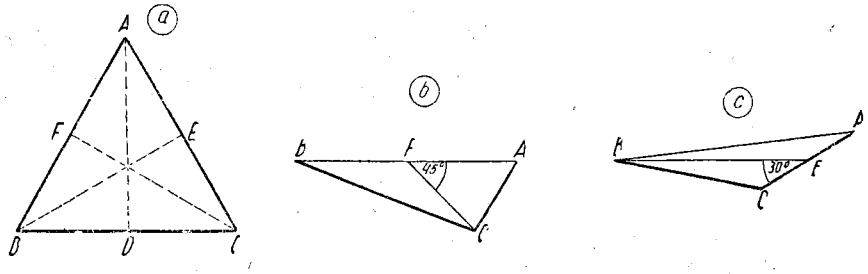


Fig. 293

Figura 293 *c* reprezintă același triunghi $\left(\frac{1}{2}, 30°\right)$, planul de desen fiind paralel cu înălțimea BE (înălțimea BE apare în mărime adevărată, iar latura CA este redusă la jumătate și face cu BE un unghi de 30°).

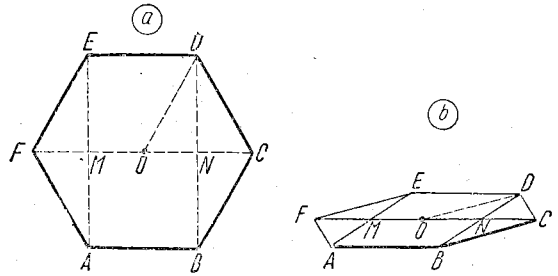


Fig. 294

3. În figura 294 *a* se vede un exagon regulat în mărime adevărată. Figura 294 *b* reprezintă același poligon $\left(\frac{1}{2}, 30°\right)$, planul de desen fiind paralel cu diagonala FC. Pentru aceasta, am dus diagonala FC în mărime adevărată și am împărțit-o prin punctele M, O, N în patru părți egale (triunghiul OCD este echilateral, DN este egal cu apotema exagonului), apoi am dus prin M și N cîte o dreaptă înclinată pe FC cu 30° și am purtat pe aceste drepte segmentele MA, ME, NB, ND egale cu jumătate din apotemă și am trasat exagonul.

După cum se vede din aceste exemple, pentru a reprezenta un poligon care nu are unghiuri drepte, se duc linii ajutătoare (înălțimea triunghiului, diagonalele FC și BD), care să formeze unghiuri drepte.

4. Figura 295 reprezintă un cub $\left(\frac{1}{2}, 30°\right)$. În figura 295 *a* am luat ca plan de desen un plan paralel cu fața anterioară a cubului, iar cubul

este privit din dreapta; în figura 295 *b* s-a luat același plan de desen, dar cubul este privit din stînga. În aceste figuri, laturile care mărginesc fața anterioară și fața posterioară a cubului *(AB, BB', DC, CC', ...)* apar în mărime adevărată, iar laturile ca *BC*, *AD* ș.a.m.d. sînt reduse la jumătate și sînt înclinate cu 30° față de orizontală.

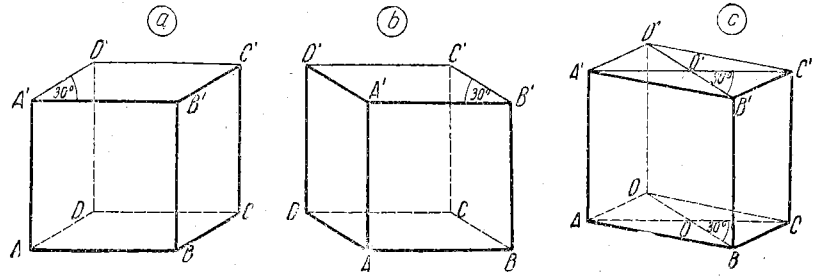


Fig. 295

Figura 295 *c* reprezintă același cub, planul de desen fiind paralel cu o diagonală a bazei. În figura 295 *c* am dus întîi diagonala *AC* în mărime adevărată, iar prin mijlocul ei am dus o dreaptă înclinată pe ea cu 30°; pe această dreaptă am purtat segmentele *OB*, *OD* egale cu cîte un sfert din diagonală. Unind *A* cu *B*, *B* cu *C* ș.a.m.d. am obținut baza cubului. Prin vîrfurile acestui paralelogram am dus niște drepte verticale ș.a.m.d.

În toate desenele, liniile invizibile se fac punctat.

EXERCIȚII

Determinarea planului

1. (o) Facem dintr-o foaie de hîrtie un sul (fig. 296). Se pot găsi pe această suprafață două puncte astfel încît dreapta care le unește să fie conținută în suprafață ? Este acest fapt în contradicție cu proprietatea planului dată la § 139 ?

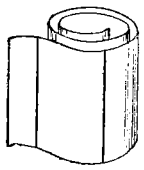


Fig. 296

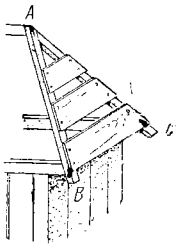


Fig. 297

2. (o) Cîte plane se pot duce printr-un punct ? Prin două puncte? Prin trei puncte? Să se dea exemple.

3. (o) Cîte plane se pot duce printr-o dreaptă? (de exemplu prin dreapta care trece prin balamalele unei uși). Dar printr-o dreaptă și un punct exterior ei?

4. (o) O parte din acoperișul unei case are forma indicată în figura 297. Pe bîrnele *AB*, *AC* se bat scînduri, care urmează

să fie acoperite cu tablă. Această parte a acoperișului reprezintă un plan. În ce mod este determinat acest plan? Să se dea și alte exemple.

5. (o) Un podeț peste un șanț este construit așa cum arată figura 298. Se fixează întîi bîrnele *A*, *B*, apoi scîndurile *1*, *2*, ș.a.m.d.; suprafața podețului reprezintă un plan. În ce mod este determinat acest plan? Să se dea și alte exemple.

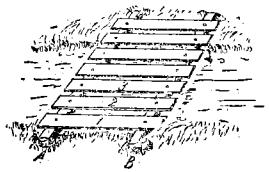


Fig. 298

Fig. 299

6. (o) Cînd picioarele unei mese (sau unui scaun) n-au aceeași lungime, masa (scaunul) nu stă bine (joacă). Ca să stea bine, ajunge de multe ori să punem sub unul din picioare o bucată de carton de grosime potrivită. La un scaun cu 3 picioare (scaunul cizmarului, fig. 299) se pot ivi aceste neajunsuri?

Să se pună acest fapt în legătură cu numărul punctelor necesare pentru a determina un plan.

7. (o) Orice triunghi este o figură plană? Dar un patrulater?

Indicație. Luăm un patrulater de hîrtie, îl îndoim după o diagonală și-l lăsăm să-și revină în parte. Cîte laturi are poligonul ce se obține astfel?

Dreapta și planul

8. (o) O dreaptă se rotește în jurul unui punct și se sprijină pe o altă dreaptă. Ce suprafață descrie?

9. (o) Cînd coasem, firul de ață trece de foarte multe ori prin pînză. Dacă considerăm pînza (întinsă) ca un plan, iar firul de ață ca o dreaptă, ar însemna ca o dreaptă să poată tăia un plan în mai multe puncte. Care este greșeala?

10. (o) Fiind dată o dreaptă *d* paralelă cu un plan *P*, cîte drepte putem duce în *P* care să fie paralele cu *d*? Ce poziție au aceste drepte una față de alta?

Poziția relativă a două drepte

11. (o) Putem așeza două creioane pe masă astfel încît să formeze două drepte oarecare?

12. (o) Să se arate pe o carte groasă sau pe o cutie exemple de drepte paralele, de drepte concurente și de drepte oarecare.

13. (o) Sala de clasă are 12 muchii. Considerăm o muchie oarecare, de exemplu marginea de jos a peretelui din față, de care este fixată tabla. Să se arate:

a) Care sînt toate muchiile paralele cu ea? (sînt 3).

b) Care sînt toate muchiile concurente cu ea? (sînt 4).

c) Care sînt toate muchiile care, împreună cu ea, formează două drepte oarecare? (sînt 4).

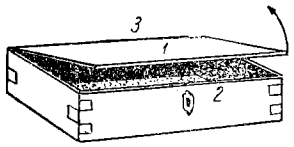


Fig. 300

14. (o) Cînd deschidem o cutie (fig. 300), rotind capacul în jurul dreptei *3*, dreapta *1* rămîne tot timpul paralelă cu dreapta *2*. Explicație.

15. (o) Cînd deschidem o ușă, una dintre marginile ei mobile rămîne mereu verticală. De ce?

16. (o) Să se arate în clasă exemple de unghiuri formate de două drepte oarecare, cum ar fi: marginea oblică a unui pupitru și marginea orizontală a unei ferestre, două creioane ținute oblic, unul într-o mînă și celălalt în cealaltă ș.a.m.d.

Poziția relativă a două plane

17. (o) Cei patru pereți ai clasei, podeaua și tavanul reprezintă 6 plane. Alegem unul din aceste plane, de exemplu, peretele din față. Să se arate: *a)* toate planele paralele cu el; *b)* toate planele concurente cu el.

18. (o) *a)* Două plane pot avea un singur punct comun?

b) Ce putem spune despre două plane care au un punct comun?

c) Dacă ținem o foaie de hîrtie deasupra mesei așa fel ca numai un vîrf al hîrtiei să atingă masa (fig. 301), se pare că cele două plane (al foii de hîrtie și al mesei) au un singur punct comun. Este adevărat că ele au numai un singur punct comun? Care este intersecția lor?

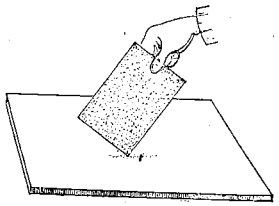


Fig. 301

19. (o) Cîte puncte comune poate avea un cerc cu un plan deosebit de planul său?

R. — **14.** Fiindcă în tot timpul mișcării ambele drepte, *1* și *2*, sînt paralele cu *3*. **15.** V. problema precedentă. **18.** *a)* Nu; *b)* că au cel puțin o dreaptă comună. **19.** Nici un punct, un punct sau două puncte.

20. (o) Cîte puncte comune poate avea un triunghi cu un plan deosebit de planul său?

21. (o) Ducem pe o foaie de hîrtie două drepte d, d', concurente într-un punct O și considerăm un punct A situat în afara planului lor. Punctul A și dreapta d determină un plan P; punctul A și dreapta d' determină un plan P'. Ce poziție au aceste plane unul față de celălalt?

22*. Avem două plane paralele P, Q și un segment AB, punctul A fiind situat în planul P, iar B în planul Q. Ducem un plan R paralel cu P și Q, la distanță egală de aceste plane. El va tăia AB într-un punct M. Să se demonstreze că $MA = MB$.

23. Avem două plane paralele P și Q, de exemplu cele două scoarțe ale unei cărți. Ducem în unul din aceste plane o dreaptă oarecare d. Ce poziție are această dreaptă față de planul celălalt? Demonstrație.

24. (o) Ținem o vergea astfel încît să reprezinte o dreaptă paralelă cu peretele din stînga al clasei, apoi o rotim astfel încît să rămînă tot timpul paralelă cu acest perete, pînă cînd devine paralelă și cu peretele din față. Ce poziție are acum vergeaua față de muchia de intersecție a acestor doi pereți?

Două plane se taie după o dreaptă d. O dreaptă d' este paralelă cu ambele plane. Ce poziție are dreapta d' față de dreapta d?

Dreaptă perpendiculară pe un plan

25. (o) Un pilon este sprijinit de mai multe ancore egale, $MA = MB = MC = MD$ (fig. 302). Ce putem spune despre segmentele OA, OB, OC, OD?

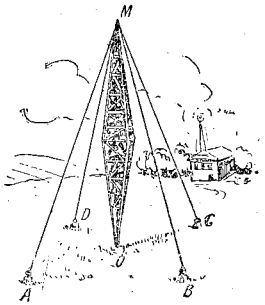


Fig. 302

26. Avem un segment de dreaptă $AB = 5$ cm și un plan P. Distanțele de la capetele segmentului pînă la plan sînt $AA' = 7$ cm, $BB' = 10$ cm. Se cere lungimea proiecției segmentului AB pe planul P.

R—**20.** Nici un punct, un punct sau două puncte. **21.** Planele se taie după dreapta AO. **22.** Ducem prin A o perpendiculară pe cele trei plane, notăm cu C, D punctele ei de intersecție cu Q, R și examinăm triunghiul ABC. **23.** Fie d în planul P. d este paralel cu Q, căci dacă d ar avea un punct comun cu Q, acel punct ar fi comun planelor P și Q — absurd. **25.** $OA = OB = \ldots$ **26.** 4 cm.

27. Dintr-un punct O, situat la o distanță de 5 cm de un plan, se duce o dreaptă OA care taie planul în A. Se dă $OA = 8$ cm. Se cere unghiul format de dreapta OA cu planul P.

28. Ținem un creion cu un capăt în planul mesei, astfel ca proiecția lui pe masă să fie egală cu jumătate din lungimea lui. Să se afle unghiul format de creion cu planul mesei (fig. 303).

29*. Sprijinim un echer ABC ($\hat{A} = 90°$) de masă, astfel ca o catetă AB să fie conținută în planul mesei, iar distanța de la vîrful C pînă la masă să fie de 20 cm. Catetele echerului sînt $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm. Se cer unghiurile pe care le formează cu masa dreptele AC și BC (fig. 304).

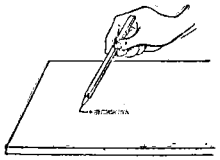


Fig. 303

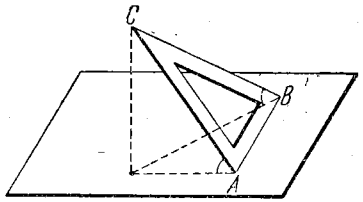


Fig. 304

30. (o) În figurile 326 a,b,c, și 329 a, să se arate care este unghiul format de o față laterală cu planul bazei.

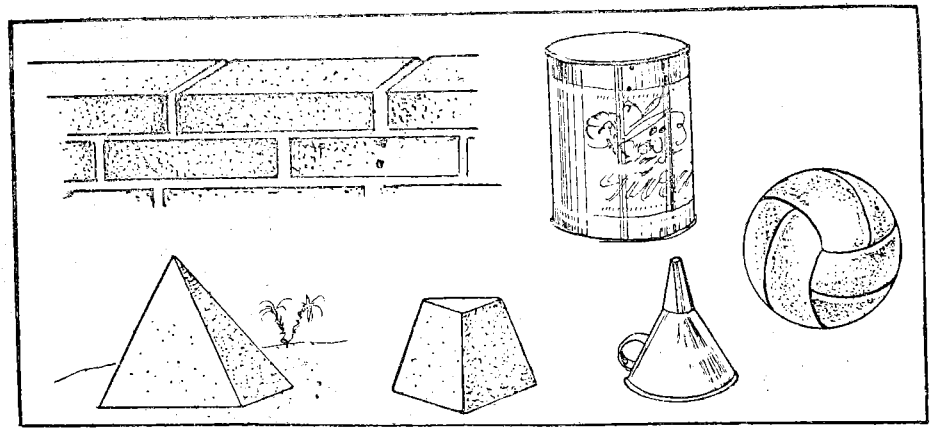
Unghi diedru

31. Avem o foaie de carton dreptunghiulară $ABCD$, în care $BC = 10$ cm. O așezăm astfel ca latura AB să fie conținută în planul mesei, iar distanța de la vîrful C pînă la planul mesei să fie de 5 cm. Se cere unghiul format de planul cartonului cu planul mesei.

32. Avem un pătrat $ABCD$ cu diagonala $BD = 10$ cm. Îl îndoim după diagonala BD astfel ca planul triunghiului BCD să fie perpendicular pe planul triunghiului ABD. Se cere distanța AC.

33. Avem un unghi diedru de 60°. Pe una din fețele diedrului luăm un punct A, situat la o distanță de 10 cm de muchia diedrului. La ce distanță de muchie se află proiecția lui A pe cealaltă față a diedrului?

R—27. $\sin A = 5 : 8$; $\hat{A} = 38°30'$. 28. 60°. 29. Fie D proiecția punctului C pe planul mesei. Triunghiul ACD dă $\widehat{CAD} = 30°$, iar triunghiul BCD dă $\widehat{CBD} = 23°30'$. 31. 30°. 32. 7,07 cm. 33. 5 cm.



CAPITOLUL VIII

ARII ȘI VOLUME

PRISMA

160. **Poliedru**. Un poliedru[1] este un corp mărginit numai de fețe plane. O cutie de chibrituri, un creion obișnuit (neascuțit), acoperișul unei case sînt poliedre. În figura 305 se văd mai multe poliedre.

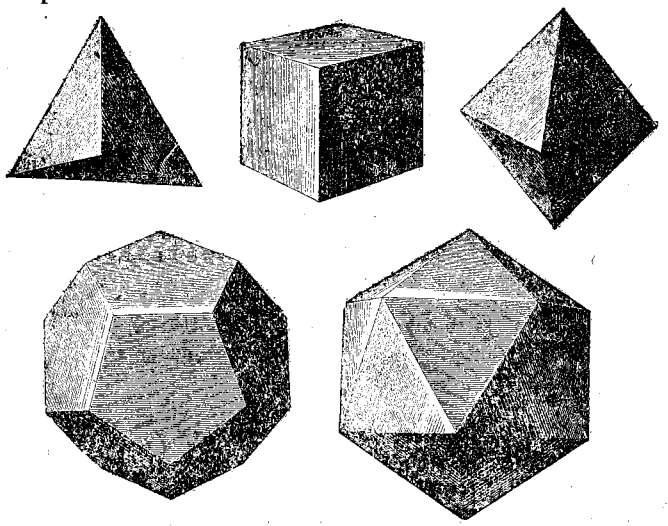


Fig. 305

[1] *poli-edru* = (un corp cu) multe fețe. A se compara cu *poli-gon* = multe unghiuri, *di-edru* = două fețe.