FRACȚIILE ÎN EGIPTUL ANTIC

Exemplificarea unei împărțiri

În primul episod al reportajului **BBC** FOUR ***The Story of Maths*** realizat şi prezentat de către profesorul *Marcus du Sautoy* de la Universitatea din Oxford, acesta ne prezintă cum ar fi efectuat vechii egipteni împărțirea a **9 lipii la 10 oameni**. Astfel, primele cinci lipii erau împărțite în jumătăți, obținând o primă serie de 10 jumătăți (câte o jumătate pentru fiecare om). Următoarele patru lipii erau împărțite în treimi, obținând 12 treimi. Zece treimi erau puse de-o parte (câte o treime pentru fiecare om), pe când ultimele două treimi erau fiecare împărțite în câte cinci părți egale, adică în cincisprezecimi, obținând astfel încă zece cincisprezecimi (câte una pentru fiecare om).
Putem efectua "operația" tăind lipii în clasă, concret în fața elevilor. Apoi trebuie însă să facem şi următoarea formă scrisă pe tablă, pentru ca elevii să aibă şi această lecție în caiet.

10 treimi

5 lipii = 10 jumătăți 2 treimi = 10 cincisprezecimi

Deci 9 **:** 10 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, aşa că fiecare din cei zece oameni primeşte:

În limbajul nostru putem efectua imediat o verificare:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{2}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$$

Dacă studiem atent problema, găsim şi o altă descompunere pentru fracția $\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, dar vechi egipteni nu ar fi ales aşa ceva, considerând trivială repetarea unei fracții (la fel ar fi fost considerată şi varianta cu repetarea de nouă ori a zecimii).

Scurt istoric

În 1858 anticarul Henry Rhind a achiziționat în Egipt un papirus, care din 1865, după moartea sa, a ajuns în custodia British Museum din Londra. Numit şi papirusul Ahmes (Ahamesu), după scribul care l-a redactat sau l-a copiat (cca. 1650 î.Chr), acesta reprezintă una dintre cele mai importante surse despre nivelul cunoştințelor matematice din Egiptul antic. Acest papirus a fost descifrat de către profesorul August Eisenlohr de la Universitatea din Heidelberg. Un alt papirus foarte cunoscut în lumea matematicii este papirusul de la Moscova (cca. 1850 î Chr.).
În papirusul Rhind, în cartea I se găsesc următoarele hieroglife pentru fracțiuni:

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{11}\quad\frac{1}{12}\;\ldots\;\frac{1}{21}$$

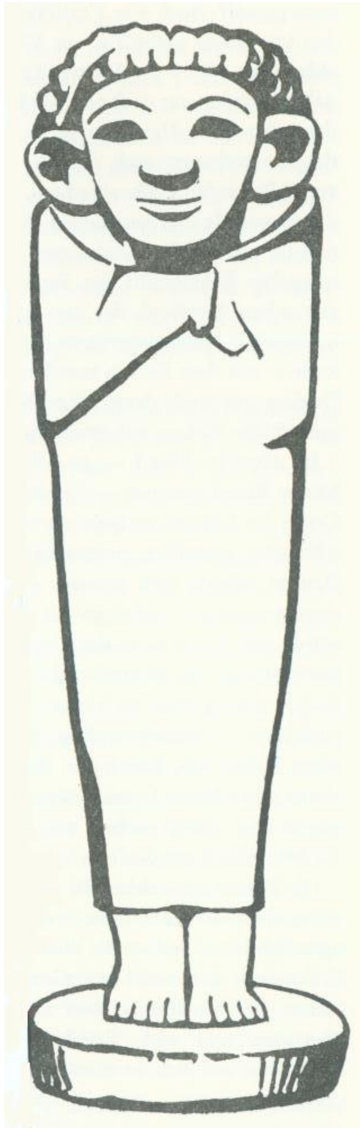
Egiptenii foloseau aceste scrieri pentru fracții cu numărătorul 1 (jumătate, treime, sfert, cincime etc.). Vom denumi fracțiile 1/n ca ***fracțiuni*** sau ***fracții unitare***, dar se mai numesc şi *fracții alicote*. În engleză se foloseşte denumirea *unit fractions*, în germană *Stammbrüche*

(fracții de bază, într-o traducere relativă), iar în franceză *fractions unitaires*. Astfel, prin fracțiune trebuie să înțelegem “o parte din” sau “a *n*-a parte din”. Egiptenii scriau asta punând o “gură” (hieroglifa pentru gură) şi sub aceasta numărul în care trebuia împărțit întregul.
În cazuri speciale, în scrierile egiptene se mai foloseau şi hieroglife prezentate alăturat:

Scrierea fracțiilor

Este evidentă dificultatea întâmpinată de vechii egipteni în scrierea unor cantități pe care noi le-am reprezenta simplu sub forma unor fracții cu numărătorul diferit de 1. Neavând o scriere pentru astfel de mărimi, egiptenii le reprezentau ca sumă de diferite fracțiuni. Astfel, un exemplu de scriere a fracțiilor este $\frac{8}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, prezentat cu hieroglife astfel:

În papirusul Rhind exista chiar un fel de tabel cu descompuneri ale fracțiilor de tipul $\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{7},\frac{2}{9},.....,\frac{2}{101}$ în fracțiuni. Într-o traducere relativă vechii egipteni exprimau aceasta astfel: *prezintă 2 prin 3, prezintă 2 prin 5* etc. Astfel, putem desigur verifica următoarele descompuneri adunând fracțiile:



$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$

$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$

…………

$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$

$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$

…………

$\frac{2}{29}=\frac{1}{29}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{174}$

……………

$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$

……………

$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$

………………

$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$

În general erau păstrate aceste descompuneri, dar uneori se găsesc şi alte variante, cum ar fi următoarele:

$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$ sau $\frac{2}{29}=\frac{1}{20}+\frac{1}{58}+\frac{1}{580}$.

Remarcabil este că nu doar pentru fracții de tipul 2/n existau astfel de descompuneri, ci şi pentru alte fracții, ca de exemplu:

$\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$

$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$

$\frac{7}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$

$\frac{7}{19}=\frac{1}{3}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1653}$

$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$

Una din primele întrebări ce ne vine în minte la vederea acestor descompuneri este evident următoarea: cum se pot obține acestea? O variantă ar fi folosind scrierea modernă cu tot aparatul de calcul cunoscut. De exemplu:

$$\frac{7}{9}=\frac{6}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{6}+\frac{1}{9}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$$

O altă cale ar fi să găsim modalităţi de reprezentare grafică a fracţiilor, adică "să tăiem lipii". Uneori putem avea surpriza să găsim cu totul alte rezultate decât cele găsite de vechii egipteni. De exemplu, $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ din reprezentarea alăturată:

Teme de lucru individual

1) Verificaţi descompunerile de mai sus, efectuând adunările de fracţiuni.

2) Pe lângă descompunerea $\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ dată mai sus, la această fracţie se mai pot găsi şi alte descompuneri. Verificaţi-le pe rând pe toate: $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}+\frac{1}{35}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{110}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{60}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$.

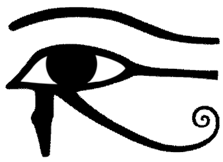
3) Împărţiţi: **a)** 3 lipii la 5 oameni; **b)** 5 lipii la 6 oameni; **c)** 7 lipii la 8 oameni. Încercaţi să daţi la fiecare cel puţin două, chiar trei soluţii diferite.

4) Despre ce fracţii este vorba în următoarele descompuneri scrise cu hieroglife?

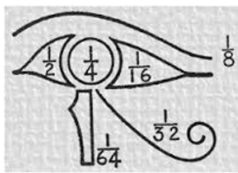
a)  **b)** 

5) Scrieţi descompunerea lui: **a)** $\frac{2}{5}$ ca $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$; **b)** $\frac{2}{9}$ ca $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$, folosind hieroglife.

6) Stabiliţi ce fracţie înseamnă $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{72}+\frac{1}{576}$.



7) Horus, cel reprezentat cu cap de vultur, era unul dintre cei mai importanţi zei în Egiptul antic. Ochiul lui Horus sau al treilea ochi era reprezentarea pentru "întreg" sau "totul", mai exact "aproape totul". Calculaţi, pe baza informaţiilor din figura alăturată ce însemna acest "aproape totul", adică $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$, şi cât era cantitatea neglijată. Aceste fracţiuni erau considerate ca reprezentând, în ordine, mirosul, văzul, gândul, auzul, gustul şi atingerea.



8) La vechii egipteni n-ar fi apărut nici o dată următoarele scrieri ca descompuneri de fracţii. De ce oare? **a)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; **b)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$.

9) Completaţi şirul de fracţii: $\frac{5}{6};\frac{7}{12};\frac{9}{20};\ldots\ldots$ cu următorii doi termeni şi descompuneţi apoi fiecare din aceşti primii cinci termeni ca sumă de două fracţiuni. Fracţiile de mai sus apar în vechea problemă despre taurii lui Helios (vezi B.3, pag.21).

Bibliografie

B1) *ERNST BINDEL – Altägyptische Bruchrechnung*, Erziehungskunst, Nr.11-1961
B2) *ERNST BINDEL – Das Rechnen*, Stuttgart, 1966
B3) *FLORICA T. CÂMPAN – Povestiri despre probleme celebre*, Ed.Albatros, 1987
B4) *MARCUS DU SAUTOY - The Story of Maths*, reportaj **BBC** FOUR, 2008
B5) Internet (cuvinte de căutare: *unit fractions*, *Egypt fractions, Eye of Horus, Moritz Cantor* etc.)
B6) Imaginea scribului este preluată din *Aritmetica distractivă* a lui *I.I.Perelman*, Ed. Tineretului, 1963, pag 70 (*din ţara piramidelor*)

Aspecte metodice

În acest material am încercat să ating miezul noțiunii de fracție, anume înțelegerea modului de devenire al unei fracții. Primul pas este fragmentarea unui întreg într-un număr de părți egale, într-un număr de fracțiuni. Apoi, o parte din acestea încep procesul invers de reunire. De exemplu, întregul este împărțit într-o primă etapă în şeptimi, care apoi încep să se reunească până la un punct, când avem să zicem cinci şeptimi; sau poate se lipesc mai multe decât au fost într-un întreg şi obținem să zicem nouă şeptimi. Fracțiile egiptene surprind chiar punctul de după primul pas, adică momentul dinaintea pasului de reîntregire. Este acel moment "magic" când fracțiunile de toate mărimile "sunt împrăştiate de-a valma pe masă" şi încep să se adune "la întâmplare" pentru a forma anumite mărimi. Tratarea vechi-egipteană a fracțiilor are un caracter de "repetecire" ca tendință opusă a fracționării, spre refacerea întregului. Este sănătos ca elevii să zăbovească o oră, două, în acest stadiu, înainte de a merge mai departe pentru a perfecționa tehnica oficială de calcul spre automatism.

Este evident pentru oricine că forma prezentată mai sus pentru subiectul fracțiilor în Egiptul antic este o formă mult simplificată şi adaptată nevoilor şi gândirii noastre. Dimpotrivă, am scos în evidență un fapt colateral pentru egipteni, anume că descompunerile respective nu sunt unice. Astfel, diferitele descompuneri lasă loc unei libertăți pline de subiectivism, de care matematica duce în general lipsă, dar care-i bucură mult pe elevi.
Un aspect interesant despre gândirea din acele vremuri antice merită totuşi a fi amintit aici: 44 din cele 49 de descompuneri găsite în papirusul Rhind încep cu prima fracție "pară". Este evident caracterul de interdisciplinaritate al acestei lecții: cu greu poți găsi un *melange* mai bun între matematică şi istorie. Ca o continuare a celor de mai sus, iată încă trei studii interesante, prezentate ca probleme:

10) În completarea şi ca răspuns la **problema nr. 8)** putem preciza următoarele: numerele 6 şi 28 sunt aşa-numite ***numere perfecte***, numere care sunt egale cu suma divizorilor lor. Concret, $6 = 1 + 2 + 3$, respectiv $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ (toți divizorii în afară de numărul însuşi). Aceste două numere perfecte erau cunoscute lui Pitagora, cel care le-a comparat cu rarii oameni perfecți, desigur pe baza acestor calități de excepție. Nicomah, în secolul I d.Chr. a găsit următoarele numere perfecte, anume 496 şi 8128. Dar de unde cunoştea Pitagora aceste proprietăți, ce apar atât de rar la numere? Pe baza celor două exemple prezentate la problema 8) putem concluziona că vechi egipteni se întâlniseră cu aceste cazuri excepționale, care pentru ei nu prezentau însă vre-un interes, pentru că sumele respective dau rezultatul 1 (pe când ei căutau rezultate ceea ce numim noi azi fracții ordinare subunitare). Or, se ştie că Pitagora a fost ani buni "la studii în Egipt", preluând de la preoții egipteni cunoştințele matematice ale acestora. Astfel, în aceeaşi linie cu sumele de la problema 8), putem da şi următoarea sumă pe baza numărului perfect 496:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=1.$$

Un exercițiu similar pe baza numărului perfect 8128 depăşeşte totuşi nivelul preocupațional legat de fracții, atât la vechii egipteni, cât şi la elevii din vremurile noastre.

11) În problemele **8)** şi **10)** am construit sume de fracții unitare pe baza divizorilor numerelor perfecte. Dacă vrem să mai facem un pas, putem să ne inspirăm din numerele prietene. Prima pereche de numere prietene este (220; 284), cunoscute şi acestea de către Pitagora, dar ajunse la mare cinste şi în lumea savanților arabi. Ele au proprietatea că fiecare este egal cu suma divizorilor celuilalt (cu 1, dar fără numărul însuşi). Astfel obținem de calculat următorul exercițiu, un pic înspăimântător, dar cu un rezultat absolut remarcabil:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{44}+\frac{1}{55}+\frac{1}{110}+\frac{1}{220}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{71}+\frac{1}{142}+\frac{1}{284}\right)$$

Cluj, dec. 2014, Prof. C.Titus Grigorovici