Dialogul PROFESOR – ELEV în rezolvarea unei probleme
(Eugen Rusu şi Dilema cerşetorului)

Dacă tot vorbirăm de curând despre cerşetori, cunoaşteţi **Dilema cerşetorului**, o problemă legată de mucurile de ţigară? Am auzit-o pe vremuri de la un prieten şi am publicat-o prima dată în caietul de matematică P3NT4GON1A nr 4 (mai 1999). Aceasta este una dintr-e cele mai frumoase probleme de matematică distractivă pe care le cunosc. Iar pe lângă partea de matematică distractivă, are şi un factor educativ foarte ridicat. Trebuie doar precizat – undeva, în timpul rezolvării problemei – că este vorba de mucuri de la ţigări fără filtru (elevii de-acum nu prea mai ştiu de-aşa ceva); iar aceasta creşte factorul de scârbire a elevilor faţă de fumat. Deci, iată problema:
Un cerşetor reuşeşte să facă o ţigară întregă din trei mucuri găsite aruncate pe stradă. Câte ţigări va fuma un cerşetor care a adunat zece mucuri?
Nu vă repeziţi să răspundeţi *trei ţigări*. Întrebarea este despre câte ţigări va fuma, nu despre câte va asambla din cele zece mucuri. Aici este prima capcană a acestei minunate probleme.

*

În acest moment, tocmai ne-am lovit de una din cele mai mari dileme ale publicării problemelor de matematică: ***Să dau răspunsul final, sau să vă las să savuraţi căutarea acestuia?*** Dacă vă dau răspunsul, atunci nu veţi parcurge minunatul drum de strădanie, plin de zbucium interior, care duce la descoperirea personală a soluţiei. Acest drum poate să dureze uneori chiar şi zile întregi, inclusiv nopţile dintre ele. În această căutare constă chiar farmecul principal al matematicii.
Când dau astfel de probleme elevilor, rezolvarea are loc într-un dialog. Elevul se gândeşte dar, în cazul în care nu găseşte soluţia corectă, eu îi mai pun o întrebare ajutătoare. Uneori, după întrebarea ajutătoare, îi las pe elevi din nou o zi-două. Apoi reluăm procesul. Aceasta se poate însă doar într-un dialog, chiar şi dacă dialogul este în scris, între două persoane aflate la distanţă. Dar trebuie să fie un dialog.
Pe vremuri, marii matematicieni se provocau astfel prin scrisori cu probleme sau rezolvări găsite personal. Cazul lui *Fermat* este arhicunoscut, dar şi *Arhimede* a practicat informarea prin scrisori asupra rezultatelor sale.
Autorii de cărţi cu matematică distractivă dau răspunsurile în partea a doua, la soluţii, mizând pe faptul că cititorul are voinţă şi nu se duce direct la răspuns. De fapt această metodă este folosită la majoritatea culegerilor de matematică. Actualmente, la unele culegeri partea de răspunsuri este atât de înghesuită încât căutarea soluţiei devine o adevărată provocare. Pe vremuri, *Grigore Gheba* punea răspunsurile chiar lângă exerciţiu, dar acolo provocarea era să nu greşeşti, nu cum se rezolvă, pentru că rezolvarea o ştiai teoretic de la clasă.
Martin Gardner, pe vremea când publica minunatele sale probleme în *Scientific American*, dădea soluţia de-abia în numărul următor, lăsând astfel cititorilor timp de o lună pentru căutarea soluţiei.
La publicarea unei cărţi, însă, acest dialog de care vorbim este imposibil. El poate fi eventual mimat de către autor prin cei doi paşi (punerea problemei, respectiv oferirea răspunsului), dar realitatea arată că cititorul fuge tot mai das direct la răspunsuri. În acest sens, *Eugen Rusu* în lucrarea *Cum gîndim şi rezolvăm 200 de probleme* (Ed. Albatros, 1972), pune chiar mai multe "filtre protectoare" în acest proces în care rezolvitorul este tentat să caute soluţia gratuit. Astfel, lucrarea sa are cinci părţi, concepute pentru a forţa rezolvitorul să caute el singur soluţia. *Pentru a da un impuls unei astfel de preocupări, culegerea nu are numai două părţi, ci patru:*
1 ENUNŢURI, 2 CUM GÎNDIM, 3 IDEEA şi **4 SOLUŢIA**

În continuare *Eugn Rusu* ne explică despre ce este vorba: *În faţa enunţului, rezolvitorul* ***încearcă singur****; dacă nu reuşeşte, caută nişte indicaţii la rubrica* **Cum gândim** *şi încearcă din nou; dacă nici acum nu reuşeşte, caută la rubrica* **Ideea** *şi, în fine, consultă rubrica* ***Soluţia****. (Nu toate problemele au nevoie de toate cele patru trepte; unde ideea este naturală, se trece direct la expunerea soluţiei.)* Culegerea mai are şi o a 5-a parte separată de ductusul cărţii, cuprinzând probleme oferite spre rezolvare fără a le mai da în final şi răspunsul.
Să vedem **câteva exemple** din respectiva carte. Aceasta cuprinde probleme din materia de liceu din acea perioadă, dar primele întrebări merg foarte bine şi la elevii actuali da a VIII-a: deşi par de aritmetică – capitol cu care începea clasa a IX-a până la reforma din 1997 – acestea nu sunt deloc evidente, două dintre întrebări având soluţia cea mai frumoasă foarte algebrică.

1 *Calculaţi din minte numărul*: $N = \dfrac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$.

2 *Priviţi ceasornicul: înregistraţi cât timp vă trebuie:*

a) pentru a pune semnul < sau > între fracţiile: $\dfrac{112}{449}$ $\dfrac{127}{507}$;

b) pentru a spune care din numerele: 7 13 29 41 59 67 73 *divide numărul* 3599;

c) pentru a memora numărul: 1 339 117 351.

Mie, personal, cel mai mult îmi place întrebarea 2b, pentru că nu-i înjoseşte pe elevii rămaşi în starea aritmetică a matematicii, care se apucă să împartă pur şi simplu. Şi prima întebare are această proprietate. Să vedem, în continuare, cum tratează *Eugen Rusu* procesul de *divulgare a soluţiilor*.
La capitolul **2 CUM GÎNDIM** găsim referiri doar la prima întrebare dintre cele alese:
1 *Am fi tentaţi să folosim faptul că* 10^2 *se vede imediat. Am pierde astfel simetria faţă de 12.*
La capitolul **3 IDEEA** apar deja referiri la toate cele patru întrebări:

1 *Să ne imaginăm numărul* $N = \dfrac{(12-2)^2+(12+2)^2+(12-1)^2+(12+1)^2+12^2}{365}$

2 *Se observă că* a) $\dfrac{112}{448}=\dfrac{1}{4}$ b) 3599 = 3600 – 1 c) *există o regularitate în succesiunea cifrelor?*

În final, la capitolul **4 SOLUŢIA** se lămureşte toată lumea:

1 $N = \dfrac{12^2\cdot 5+10}{365}=\dfrac{2\cdot 6\cdot 60+10}{360+5}=2$

2 *a)* $\dfrac{112}{449}<\dfrac{112}{448}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{127}{508}<\dfrac{127}{507}$

b) 3599 = 3600 – 1 = (60 –1) (60 + 1) = 59 · 61

c) Se observă că succesiunea cifrelor este
13 13 · 3 (= 39) 39 · 3 (= 117) 117 · 3 (= 351)

Dacă tot am ales spre exemplificare întrebarea **1**, hai să o prezentăm mai detaliat, pentru cei care nu o cunosc. Seria de numere (10, 11, 12, 13, 14), numită *suita lui Racinski* (problema lui S. A. Racinski, în I. I. Perelman, Aritmetica distractivă, Ed. Tineretului, 1963, pag 94), are minunata proprietate că $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$, fiind singura serie de numere naturale consecutive cu această proprietate, prin analogie cu renumitele trei numere pitagoreice care formează *triunghiul egiptean*: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Mai mult, cele două sume din egalitatea de mai sus au exact valoarea 365 (numărul de zile din anii obişnuiţi, ne-bisecţi). Toată conjunctura este surprinsă minunat în tabloul **"O problemă dificilă"** din 1895 a pictorului rus *Nikolay*

Bogdanov-Belski (1868-1945); tabloul poate fi găsit pe net sub titlul “Mental Aritmetic, in the Rachinsky School”.
Revenind la problema iniţială din titlu, ca să vă ajut spre un răspuns mai bun, vă pun o întrebare ajutătoare: *câte mucuri de ţigară are cerşetorul nostru după ce a fumat primele trei ţigări?*

*

Am abordat mai sus dialogul dintre profesor (cel care propune problema) şi elev (cel care are de rezolvat problema), în rezolvarea unei probleme. Acest dialog poate avea loc în cadrul unei ore, sau se poate intinde pe parcursul a mai multe zile. În acest caz apare însă o problemă delicată: elevul este tentat să fenteze, anume să caute soluţia în altă sursă. De obicei îl întreabă pe un adult din preajmă, iar acesta se simte dator să-l ajute, dându-i soluţia, dar sabotând, fără să-şi dea seama, procesul dorit de profesor, anume de a pune mintea elevului la treabă. În acest sens, eu îi avertizez pe părinţi să fie mai reţinuţi cu ajutatul în astfel de cazuri. Eventual, dacă doresc, pot ei să preia dialogul, dar în nici un caz să nu-i dea copilului rezolvarea “mură-n gură”, pentru că doar îi cultivă lenea în gândire, iar pe mine a doua zi puţin mă impresionează dacă elevul vine cu rezolvarea făcută de altcineva.
Actualmente există şi o altă formă de a sabota strădania profesorului de a forţa elevul să gândească: internetul, unde elevul găseşte, zice-se, orice. De pildă, în urmă cu doi ani le-am explicat elevilor ce-i acela un număr perfect, pe baza primului astfel de număr: 6 = 1 + 2 + 3 (adică suma tuturor divizorilor săi, înafară de numărul însuşi). Am făcut ca aceasta să se întâmple la sfârşitul orei, iar la temă le-am dat să caute următorul număr perfect, cu observaţia că este undeva până la 50. La temă le-am mai dat să scrie şi toţi divizorii unor numere mai mari, printre care şi 220 şi 284. A doua zi, la verificarea temei, urma să văd cine l-a găsit pe al doilea număr perfect, 28, iar apoi să-i pun să calculeze suma divizorilor la cele două numere speciale, mizând pe surpriza uriaşă din momentul când elevii vor vedea sumele respective. Apoi urma să le explic că acestea se numesc numere prietene etc. Acesta era planul, dar a doua zi surpriza a fost pentru mine, şi anume una deloc frumoasă: un elev, plecând în ziua precedentă de la şcoală, a accesat internetul direct din maşină, de pe smartphone, dând spre căutare *numere perfecte*. L-a aflat astfel pe 28, iar apoi, de pe acelaşi site a aflat şi despre faptul că 220 şi 284 sunt numere prietene şi de ce. Iar a doua zi, când să verific tema şi să văd cum au gândit elevii, el a ridicat mâna şi mi-a trosnit totul direct, tăindu-mi orice posibilitate de a-i mai aduce cumva în starea de gândire adevărată măcar pe colegii săi. De atunci fac astfel de probleme *găsibile pe internet* în cadrul unei singure ore, pentru a nu mă mai expune riscului.
Dacă tot suntem la “exemple negative”, adică la felul în care mass-mediile noi îi oferă tânărului posibilitatea de a scurt-circuita procesul de căutare a soluţiei prin propria gândire (implicând strădanie, muncă, transpiraţie, stress etc.), merită aici “să scoatem în faţa clasei” cazul emisiunilor *Scamschool* (prezentate pe acest site printr-o postare din martie 2016). Spuneam atunci că emisiunea este prezentată într-un mod foarte atractiv/agitat de către *Brian Brushwood*; din punct de vedere comercial este perfect: emisiunea te atrage, o urmăreşti cu sufletul la gură. Asta este bine şi din punct de vedere “consumist”, telespectatorul fiind redus astfel la o poziţie foarte pasivă: el nu trebuie să se gândească la găsirea soluţiei; chiar nici nu are timp să stea să se gândească, pentru că emisiunea decurge în ritm foarte alert. Singurul moment când spectatorul are voie să gândească este atunci când i se afişează soluţia pe ecran şi el trebuie să o înţeleagă, să o compileze rapid. La vizionarea emisiunii la televizor încă mai există o oarecare protecţie a soluţiei, deoarece aceasta este afişată pentru foarte scurt timp şi este posibil să nu apuci să o memorezi, nici vorbă să o şi notezi.

Revăzând însă emisiunea pe internet, cade şi această barieră protectoare: poţi da cursorul înapoi şi pune pe pauză în momentul afişării soluţiei. Personal, de pildă, trebuie să recunosc că nu am avut tăria să opresc filmuleţele şi să caut soluţia la nici măcar una dintre provocări. Este evident că nici elevii nu o vor face. În prezentarea site-ului din martie chiar încheiam cu un astfel de comentariu sub formă de **morala poveştii:** în emisiunile de pe *Scam School* totul decurge foarte repede şi, în avântul emisiunii, primeşti şi răspunsul în 2-3 minute. Astfel eşti redus la un simplu spectator, un spectator la SPECTACOLUL GÂNDIRII (în care alţii sunt actori).
Revenind din nou la dilema iniţială, *după ce a fumat a patra ţigară, câte chiştoace mai are cerşetorul, şi cum procedează cu acestea?*

*

Este evident în acest moment că în eseul de faţă am tratat opoziţia dintre cele două feluri de a face matematică, să le denumim din punct de vedere al elevului ***matematica pasivă*** şi respectiv ***matematica activă***. Nici una dintre cele două nu apare de obicei în stare pură, dar să le presupunem astfel în continuare pentru a le putea lua scurt sub vizorul atenţiei.
1) Matematica pasivă o practică elevul atunci când el stă pasiv şi neimplicat, iar profesorul "toarnă cu tolcerul" matematică în el. Un caz tipic în acest sens este atunci când profesorul expune problema, iar apoi, pentru a economisi timp şi a eficientiza ora, în sensul de a parcurge cât mai mult material, profesorul arată direct şi cum se face rezolvarea, aleasă desigur şi aceasta cea mai eficientă. Elevul nu apucă să se implice; după ore întregi de astfel de matematică nici nu se mai gândeşte să se implice. El trebuie doar să copieze de pe tablă şi să încerce cumva acasă să memoreze rezolvarea respectivă. Îl mai ajută, ce-i drept, dacă la temă apar exerciţii/probleme de acel tip, pentru că va avea ocazia să devină activ şi să se implice atunci când îşi face tema (dacă şi-o face; dacă se gândeşte să se uite la rezolvarea de la clasă, şi mulţi alţi de "dacă", care, din păcate, de obicei elevul nu le cumulează, fiindu-i mult mai uşor să rezolve situaţia acasă, singur, cu un simplu NU ŞTIU!). Revenind la profesorul care "toarnă cu tolcerul" matematică în elevi, acesta uneori încearcă să-şi acopere fapta de a nu-i lăsa pe elevi să gândească, venind cu o întrebare retorică de tipul "ei, cum credeţi că se rezolvă aceasta?", după care le dă rezolvarea.
O variantă mult mai des întâlnită a acestui exemplu – care camuflează şi mai bine "fapta" de a nu le lăsa timp majorităţii elevilor să gândească – este atunci când profesorul dă problema, iar "olimpicul clasei" ridică mâna şi trânteşte rezolvarea. Este evident că şi în acest caz restul elevilor sunt reduşi la o stare pasivă. Uneori, colegii mai buni vor trăi o stare de uimire, transformabilă însă uşor în invidie, urmată de o evoluţie a sentimentelor şi a acţiunilor ce ţine de domeniul psihologilor. În foarte rare cazuri această situaţie acţionează însă mobilizator la adresa celorlalţi; de obicei efectul este opus. Un caz aparte se întâmplă atunci când cele prezentate aici se referă la demonstrarea unei teoreme, respectiv a unei formule. Elevii se prind destul de repede că acestea nu se regăsesc şi la temă, şi oricum nu se dau la lucrări scrise. Ca urmare nici nu le învaţă! Deci, aceste demonstraţii – din care unele sunt chiar frumoase şi deosebit de educative – se irosesc şi ca timp petrecut din ora de matematică, şi ca oportunităţi de dobândire a gândirii matematice.
Este evident că pe durată, această politică reduce elevii la o stare pasivă în învăţarea matematicii, cea mai mare pierdere fiind lipsa formării abilităţilor de gândire specifică la majoritatea populaţiei şcolare, cu efecte distrugătoare la nivelul majorităţii populaţiei adulte din ţara noastră. În acest moment m-am apropiat periculos de mult de subiectul securităţii naţionale şi nu înţeleg de ce subiecte ca acesta nu sunt analizate mai serios de către forurile responsabile.

2) Matematica activă o practică elevul atunci când se gândeşte chiar el la găsirea unei soluţii la problema primită. Aceasta se întâmplă de obicei atunci când apar momente de *predare prin problematizare*. Profesorul trebuie însă să o practice în mod conştient şi voit: trebuie să-i domolească pentru câteva minute pe cei care au găsit deja soluţia, astfel încât şi alţii să apuce să gândească. După o vreme de practicare a unei astfel de predări, şi alţi elevi capabili din clasă încep să găsească soluţia. Merită să evoc aici două exemple din anul trecut şcolar. Într-un caz, o elevă de clasa a VI-a găsise după un minut soluţia la o întrebare de construcţie geometrică cu rigla şi compasul. După încă două minute, eu ne mai având răbdare (mă presa lecţia din spate), am vrut să dăm soluţia. În acest moment, o elevă a spus cu ton ridicat: *numai un pic, aşteptaţi să gândim şi noi!* OK! Am mai stat 2-3 minute, după care elevii au acceptat să dăm soluţia existentă. Într-un alt caz, un elev, transferat de la o altă şcoală la începutul clasei a VIII-a, i-a spus mamei sale următoarele: *La şcoala cealaltă luam 10 pe linie pentru că ştiam; aici chiar mă pune să gândesc*. Fără să-şi dea seama, el se referea atunci la predarea prin problematizare, anume că acum nu mai primea conţinuturile gratuit, ci era atras, era forţat să le găsească singur. Iar el, fiind un elev bun, intra cu bucurie în acest proces de căutare a soluţiei. Această cale este însă mare consumatoare de timp şi nu poate fi practicată tot timpul orei. Concret, predarea prin problematizare se foloseşte doar în anumite momente ale orei, de dorit însă cât mai des. Cu timpul, după mult exerciţiu (o lună, un semestru, depinde de la caz la caz), elevii încep să se obişnuiască şi toţi cei capabili participă activ la ore.
Cât despre întrebarea iniţială, observaţi că am practicat un mic joc "a la *Eugen Rusu*", ascunzând, împrăştiind rezolvarea problemei până spre sfârşitul poveştii. Ca să nu vă las "cu ochii'n soare" legat de ţigările cerşetorului, sper că aţi ajuns la patru ţigări fumate şi încă două chiştoace rămase. În acest moment inventivitatea cerşetorului depăşeşte orice limite. El împrumută un chiştoc de la colegul de după colţ, fumează a cincea ţigară, după care îi restituie acestuia chiştocul împrumutat.
După momentul de uimire în faţa rezolvării (ce poate fi lăsat la câteva minute), problema permite şi o analiză ulterioară: cerşetorul nostru face din trei chiştoace o ţigară, după care, dacă o fumează, rămâne cu un chiştoc. Asta înseamnă că fumatul unei ţigări de acest fel echivalează cu două chiştoace fumate. În acest moment răspunsul de *cinci ţigări fumate* devine evident, rămânând doar uimirea pentru calea urmată în a le fuma pe toate (fără să se ardă la buze ☺).

*

Pentru cei care aţi avut răbdarea să citească această ciudată dizertaţie despre strădania de ai atrage pe elevi în procesul gândirii (în principal prin intermediul paletei largi de probleme numite generic *matematică distractivă*), vă ofer în final un cadou primit de curând de la un prieten, anume o nouă problemă distractivă:
Un orb (o persoană nevăzătoare) are două pastile roşii şi două albastre, care nu diferă deloc prin mărime, textură sau greutate, şi pe care trebuie să le ia câte una roşie şi una albastră azi, şi iarăşi una roşie şi una albastră mâine. Cum procedează, presupunând că nu are cui cere ajutorul?
Eu personal am găsit soluţia (o soluţie) la această problemuţă în cca. 5 minute, la o discuţie lejeră în jurul focului unde se coceau vinetele pentru pus pe iarnă. Voi, în cât timp o daţi gata? Cu părere de rău (☺) vă anunţ că aici nu voi da soluţia, nici măcar o indicaţie, exact pentru a vă provoca să deveniţi activi în gândire. Trebuie să recunosc, însă, că de obicei situaţia nu stă aşa de simplu. Odată propusă problema cuiva, după o scurtă vreme acesta începe să se roage să-i dai şi soluţia pentru că "problema este nerezolvabilă". Iar orgoliul tău, cel care ai în buzunar şi soluţia, este puternic alimentat, mai ales atunci când "i-o trânteşti" şi îi trezeşti uimirea. Atunci ai impresia

că tocmai i-ai dovededit că îi eşti superior. Acesta, la rândul lui, va oferi problema cu prima ocazie altcuiva, alimentându-şi şi el orgoliul, la rândul său. Este, într-un fel, o situaţie similară cu spusul unui banc bun: de-abia aştepţi să-l spui şi tu altcuiva. Ca profesori însă, trebuie să avem grijă să nu transformăm aceste probleme în simple bancuri, ci să le privim ca oportunităţi rare de a-i atrage pe elevi în procesul de gândire. Pentru cei care savuraţi astfel de probleme, iată la pachet încă una, din aceeaşi categorie (1 + 1 gratis☺), căreia eu nu i-am găsit soluţia, dar i-a găsit-o fiul meu în jumătate de minut:

Se dau două sfori de lungimi egale, despre care ştim următoarele: fiecare arde, de la un capăt la celălalt, în 30 de minute, dar viteza de ardere de-a lungul sforii nu este constantă (nu se ştie de ce depinde vitaza de ardere pe unitate de lungime, nu are legătură de pildă cu grosimea poate variabilă a sforii etc.). Cum se poate măsura, prin aprinderea acestor două sfori, un interval de 45 de minute?

C. Titus Grigorovici
23 Aug. 2016