

Multe probleme clasice de matematică se evidențiază printr-o ridicată valoare didactică. Cu ajutorul lor elevii pot înțelege cu adevărat o lecție, un capitol sau chiar o întreagă ramură a matematicii. Alte probleme, ce vin poate din negura timpului, sunt pline de farmec, având acea deosebită calitate de a trezi în elevi dragostea și admirația pentru matematică.

În culegerea de față găsiți o mare parte din această zestre de probleme valoroase lăsate nouă moștenire de matematicienii din toate timpurile.

Supliment al caietelor de matematică

P3NT4GON1A

Mariana Grigorovici

Titus Grigorovici

CULEGERE DE PROBLEME ȘI EXERCITII DE MATEMATICĂ PENTRU GIMNAZIU



ATENȚIUNE, ATENȚIUNE !!!

În numerele 7 și 8 ale Caietelor de matematică P3NT4GON1A găsiți c.m.m.m.m.c. adică „cel mai mic memorator matematic cunoscut”, cuprinzând elemente esențiale din materia de gimnaziu.

Cuprins – peste 1000 de exerciții și probleme

Capitolul I	Recapitularea materiei din clasele V-VII în 7 lecții pentru începători
Capitolul II	Aprofundarea unor teme din materia claselor V-VII pentru avansați
Procente	17
Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații..	19
Geometrie plană	25
Capitolul III	Diferite teme din materia clasei a VIII-a
Calcul algebric cu numere iraționale.....	37
Operații cu fracții algebrice	38
Corpuri geometrice	40
Capitolul VI	Diverse
	45

Caietele de matematică P3NT4GON1A

Avizate de Direcția Generală a Învățământului Preuniversitar

TITUS GRIGOROVICI – redactor coordonator

MARIANA GRIGOROVICI – redactor și tehnoredactor

Culegere de probleme și exerciții de matematică pentru gimnaziu

ISBN-973-9196-64-0

EDITURA TRIADE – C.P. –1– 400, 3400, CLUJ-NAPOCA

Tipărit la TIPOGRAFIA PRINTEK, CLUJ-NAPOCA, tel. 092-744932

Comenzi la tel. 098-601275 .

PREFĂTĂ

În ultimii doi ani școlari, am publicat în Caietele de matematică P3NT4GON1A, o serie de teste pregătitoare pentru nou înființatul examen de capacitate. Între timp piata a fost invadată efectiv de lucrări conținând teste recapitulative, sprijinul nostru în această direcție nemaifiind necesar. În urma acestei perioade, când P3NT4GON1A s-a transformat în mare parte în culegere de teste, am rămas cu un bagaj de exerciții și probleme ce nu merită a fi date uitării, putând fi folositoare și următoarelor generații de elevi. În această culegere nu ne-am propus să acoperim toată materia de examen, ci doar anumite teme slab sau deloc tratate în manualele sau culegerile existente pe piață. Acestea au putut fi ordonate în caietul de față în trei părți principale.

În prima parte oferim elevilor cu lipsuri mari la sfârșitul clasei a VII-a, o reluare a noțiunilor și cunoștințelor elementare din clasele V, VI și VII. Sperăm că parcurgerea celor șapte lecții vor ajuta mulți elevi fără înclinații matematice la promovarea examenului de capacitate.

Partea a doua este dedicată elevilor avansați în matematică. Acestora le oferim trei seturi de probleme, în selectarea cărora am pus mare accent pe frumusețea și savoarea materialului oferit. În primele două se găsesc probleme cu procente, respectiv cu ecuații sau sisteme de ecuații, probleme tradiționale ce i-au încântat decenii, chiar secole de-a rândul, pe cei ce s-au avântat în cunoașterea matematicii. În setul de geometrie plană, cei doritori vor găsi o colecție de probleme obligatorii pentru orice elev cu pretenții. Pe lângă majoritatea problemelor clasice de valoare, cu sau fără nume, există și unele probleme compuse de autori. Acest set de probleme se bazează pe setul similar publicat în P3NT4GON1A NR.2 din aprilie 1998.

Partea a treia cuprinde câteva teme pentru clasa a VIII-a. În primul rând câteva exerciții cu numere concrete, a căror rezolvare este de natură algebrică și care se potrivesc acestei vîrste. Apoi, urmează un set de exerciții elementare de însușire a stilului de calcul cu fracții algebrice. Multe dintre acestea au figurat de-a lungul anilor în subiectele examenelor de admitere în licee. A treia temă este dedicată corpurilor geometrice, conținând atât probleme tradiționale pentru examen, cât și probleme aplicative.

Diferite probleme sau exerciții savuroase, ce nu au putut fi încadrate în vreuna din temele de mai sus, au fost adunate în finalul acestui caiet.

Sperăm că problemele alese vor trezi în inimile voastre bucuria și atracția pentru matematică.

Mariana Grigorovici
Titus Grigorovici

49. Se dă trapezul ABCD ($AB \parallel CD$) cu $AB = 20$ cm, $DC = 10$ cm, $BD = 24$ cm și $AC = 18$ cm. Calculați aria și perimetrul triunghiului DAO, O fiind intersecția diagonalelor.

50. În triunghiul ABC dreptunghic în A se duce înălțimea AD, $D \in (BC)$. Știind că $DB = 7$ cm iar $DC = 63$ cm, să se afle: a) înălțimea AD; b) distanța dintre centrul cercului circumscris și ortocentrul triunghiului.

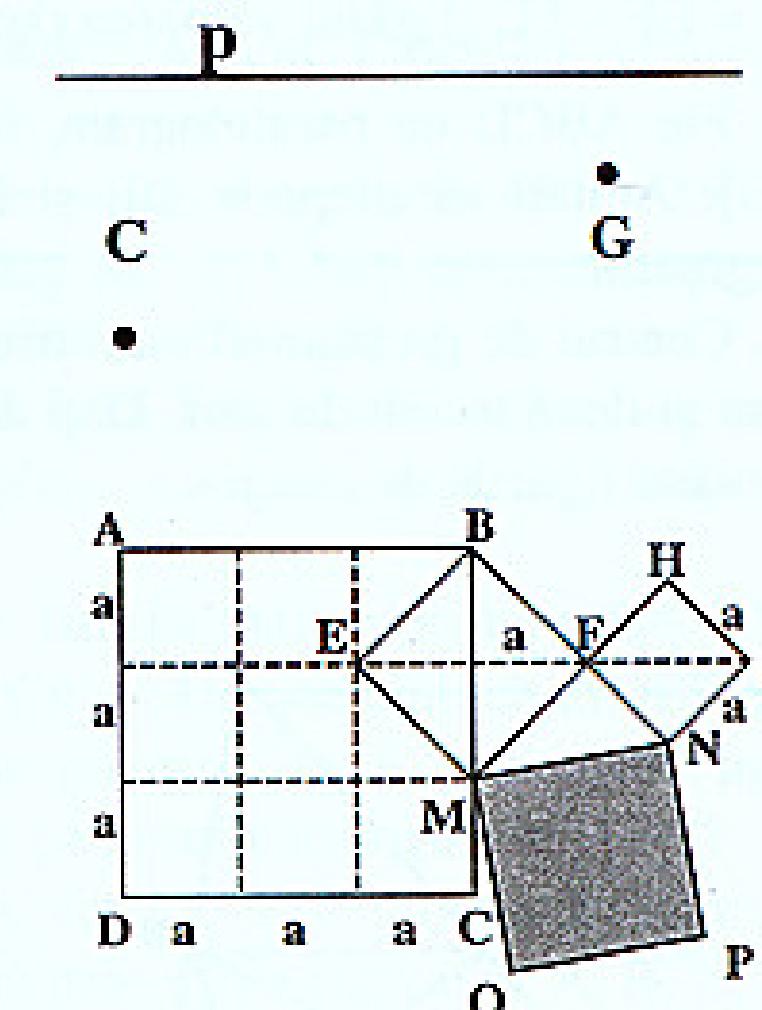
51. În cercul de diametru [BD] se înscrie patrulaterul ABCD cu $AB = 3\sqrt{2}$ și $BC = 2\sqrt{3}$. Fie $AM \perp BD$ și $CN \perp BD$, $M, N \in [BD]$. Calculați diametrul cercului știind că $MN = 1$.

52. (Problema "cu moneda de 3 lei" a lui Țițeica) Prin punctul P desenăm cu o monedă trei cercuri care se intersectează două câte două încă o dată în punctele A, B respectiv C. Arătați că cercul care conține punctele A, B și C este congruent cu celelalte trei cercuri.

53. Un trapez isoscel este circumscris unui cerc. Arătați că aria acestui trapez este produsul dintre media aritmetică și media geometrică a bazelor.

54. Două cercuri au razele $R_1 = 5$ cm și $R_2 = 12$ cm. Să se găsească unghiul la centru din al doilea cerc care subîntinde un arc cu aceeași lungime ca cea a primului cerc.

55. O capră, reprezentată în figura alăturată prin punctul C, vrea să ajungă pe drumul cel mai scurt la grajdul reprezentat prin punctul G, trecând în drumul său, pentru adăpare, pe la părâul învecinat, reprezentat de dreapta p. Trasați în figura alăturată, cu exactitate, drumul caprei.



56. În patrulaterul convex ABCD avem $AB = AC = AD = BD$. Calculați $m(\angle BCD)$.

57. Desenați triunghiul isoscel ABC cu baza $BC = 8$ cm și înălțimea $AD = 7$ cm. Este acest triunghi echilateral? Justificați răspunsul.

58. De câte ori intră, ca arie, pătratul MNPQ în pătratul ABCD din figura alăturată? (BEMF și FHGN sunt pătrate)

CAPITOLUL III DIFERITE TEME DIN MATERIA CLASEI a VIII-a

CALCUL ALGEBRIC CU NUMERE IRATIONALE

1. Evitând să raționalizați numitorii fracțiilor, efectuați următoarele calcule:

a) $\frac{5\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 7\sqrt{54} - 8\sqrt{96} + 9\sqrt{150}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 3\sqrt{75}}$; R: $9\sqrt{2}$

b) $(6\sqrt{48} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{27}) \cdot (2\sqrt{3})^{-1}$; R: 10

c) $\left(\frac{2}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{3}{\sqrt{75}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$; R: 1

d) $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{32}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \cdot (3\sqrt{2})^{-1}$; R: 1

e) $\left(\frac{7}{2\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{24}} + \frac{5}{\sqrt{54}} \right) \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{216}} \right)^{-1}$; R: 1

f) $\left(2\sqrt{2} + \frac{3 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{\sqrt{8}}$; R: 2

g) $\frac{\sqrt{18} - 3}{\sqrt{2} - 1} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{3} - \frac{\sqrt{80}}{2\sqrt{5}}$; R: 0

h) $\frac{6}{\sqrt{28} - 4} \cdot \left[\sqrt{3^2 + 4^2} - \sqrt{(3+4)^2} + \sqrt{2^2 + 3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12} \right]$; R: 3

i) $\left[(2\sqrt{7} - \sqrt{28} \cdot 3) \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} + \frac{7}{2} \cdot \frac{4 + 3\sqrt{8}}{2 + \sqrt{18}} \right] \cdot \left[\left(5\sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt{2} + \sqrt{50} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \right]$; R: $-\frac{9}{4}$

j) $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{75}}{2^3} - \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$; R: 0

2. Calculați media aritmetică a numerelor: $\frac{\sqrt{32} + 4}{\sqrt{2} + 1}$ și $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{20}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$. R: 3

3. Simplificați: $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ R: $1 + \sqrt{5}$

OPERAȚII CU FRACTII ALGEBRICE

1. Efectuați:

a) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : \frac{1}{ab}$

R: $a+b$

b) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{b^2 a^2}{b^2 - a^2}$

R: 1

c) $\frac{x+y}{x} + 2 + \frac{x-y}{y}$

R: $\frac{(x+y)^2}{xy}$

d) $\frac{x+y}{x^2 y} + \frac{x-y}{xy^2}$

R: $\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}$

e) $\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}$

R: 0

2.

a) $\frac{x}{x+y} + \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x-y}$

R: $\frac{x+y}{x-y}$

b) $\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x-1}\right)$

R: $\frac{x}{x+1}$

c) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}$

R: $\frac{a-b}{a+b}$

d) $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

R: $\frac{2b}{b-a}$

e) $\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} - \frac{10}{x^2 - 4}\right) \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$

R: $\frac{x-2}{x+2}$

f) $\frac{4x^2 - 1}{8x} \cdot \left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}\right)$

R: 1

g) $\left(\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} - 1\right) : \left(\frac{4}{a^2 - 1} + 1\right)$

R: 1

h) $\left[1 - \left(\frac{1+b}{1-b} - 2 + \frac{1-b}{1+b}\right) : \frac{4b}{1-b}\right] : \frac{1}{1+b}$

R: 1

i) $\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy} + 1\right) \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}$

R: $\frac{x+y}{x-y}$

3.

a) $\frac{18}{x^2 - 9} + \frac{x}{x+3} + \frac{3}{3-x}$

R: $\frac{x-3}{x+3}$

b) $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)$

R: $a - b$

c) $\left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2}\right) : \left(x - 2 + \frac{10-x^2}{x+2}\right) \cdot (2-x)$

R: 1

d) $\left(\frac{3}{2x-1} + \frac{7}{2x+1} + \frac{20x-4}{1-4x^2}\right) : \frac{2}{x+1}$

R: 0

e) $\left(u - \frac{4uv}{u+v} + v\right) : \left(\frac{u}{u+v} - \frac{v}{v-u} - \frac{2uv}{u^2 - v^2}\right)$

R: $u - v$

f) $a \cdot \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{a+1}\right)$

R: 1

g) $\frac{1}{x+2} + \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x+2} - 1\right) : \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 4x + 4}$

R: $\frac{4}{(x+2)^2}$

4.

a) $\frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} : \frac{a}{a+b}$

R: 1

b) $\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\right) : \left(1 + \frac{4}{x^2 - 1}\right)$

R: $\frac{1}{x^2 - 1}$

c) $\left(\frac{3}{a^2 - 4a + 4} + \frac{2}{a-2}\right) : \frac{2a-1}{a^2 - 4}$

R: $\frac{a+2}{a-2}$

5.

a) $\left(x - \frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2 - x - 1}$

R: $x - 1$

b) $\frac{4x-4}{x+2} : \left(1 - \frac{3x^2}{4-x^2}\right)$

R: $\frac{x-2}{x+1}$

c) $\frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{1}{4-x^2}$

R: $\frac{1}{x^2 - 4}$

d) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} - \frac{x+1}{1-x^2}$

R: $\frac{1}{x-x^2}$

e) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a-b}{a^2 + ab}$

R: 0

f) $\frac{x-6}{x^2 - 4} \cdot \frac{x+2}{x} + \frac{6x-4}{x^2 - 4x + 4} : \frac{4}{x-2}$

R: $\frac{3x+6}{2x}$

41. A două zecimale a numărului real $5\sqrt{3}$ este
42. În ultimii zece ani pe data de 2 februarie, la Vatra Dornei s-au înregistrat următoarele temperaturi maxime: -10° , -7° , $+1^\circ$, -3° , $+6^\circ$, -2° , -12° , -4° , 0° , $+1^\circ(\text{C})$. Calculați temperatura medie a acestei zile.
43. Aproximarea cu două zecimale a numărului $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \pi$ este
44. Pe o hartă un pătrat cu latura de 2 cm reprezintă pe teren 16 km^2 . Un pătrat cu latura de 4 cm va reprezenta pe teren km^2 .
45. Ce unghi formează ceasornicului la ora 5 și 10 minute?
46. Într-o livadă merii sunt plantați la interval de 12,5 m. Căți pomi sunt necesari pentru a forma un rând de 150 m lungime?
47. Efectuați împărțirea cu rest: $134 : 13$.
48. Norbert mănâncă un tort în două zile; Andreas mănâncă un tort în trei zile; Adela mănâncă un tort în şase zile. În câte zile vor termina tortul cei trei prieteni?
49. Izvorul nr. 5 din stațiunea Olănești, vestit pentru tratamentul bolilor de ficat, are un debit de 480 litri în 24 ore. Câte ore sunt necesare pentru a umple 800 sticle de câte 250 ml?
50. Suplementul complementului unghiului de 15° are măsura de
51. Calculați: $(37 - 1) \cdot (37 - 2) \cdot (37 - 3) \cdots (37 - 73)$.
52. Fie mulțimea $M = \{0^1, 1^2, 2^3, 3^4, 4^5, 5^6, 6^7, 7^8, 8^9, 9^{10}\}$. Să se determine submulțimea care conține toate pătratele perfecte din M .
53. O pendulă bate o dată la ora unu, de două ori la ora două, de trei ori la ora trei și aşa mai departe până la ora 12 când bate de 12 ori, după care o ia de la început. În afară de aceasta bate o dată la fiecare jumătate de oră. De câte ori bate această pendulă în 24 de ore?
54. Calculați: $\frac{13}{19} + \frac{19}{13} + 8 + \frac{6}{19} + \frac{7}{13}$.
55. Un bou legat de un par cu o funie lungă de 7,5 m paște iarba din jurul parului în patru zile. a) Câte zile îl ajunge iarba dacă înjumătățim funia?
b) În câte zile ar paște toată iarba dacă funia ar fi de 11,25 m?

R: a) 0 zi ; b) 9 zile

BIBLIOGRAFIE

1. Caietele de matematică P3NT4GON1A (1998-2000)
2. Aurel Boteanu, A. Hollinger – Matematică VII, 1970
3. Ioan St. Mușat, C. Ionescu-Țiu – Concursul de admitere în licee, 1967
4. C. Ionescu/Bujor, I. Olivotto, I. Giurgiu, A. Hollinger, C. Pârvulescu – Matematica, VIII, 1971
5. E. Cărbunaru, C. Cărbunaru – Culegere de probleme , 1996
6. Eugen Gură – Matematică recreativă, 1985
7. I. Perelman – L'Algebre recreative, Moscova 1959
8. M. J. Powell – Mathematics, London 1983
9. Marilena Stoica, Florica Banu – Capacitate 2000
10. A. Ghioca, N. Teodorescu – Culegere de probleme, vol III, 1987
11. Grigore Gheba – Exerciții și probleme de matematică, 1969