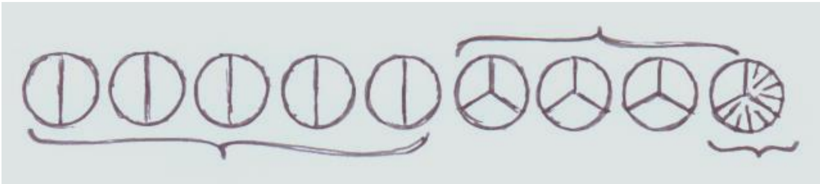
FRACŢIILE ÎN EGIPTUL ANTIC

Exemplificarea unei împărţiri

În primul episod al reportajului **BBC** FOUR ***The Story of Maths*** realizat şi prezentat de către profesorul *Marcus du Sautoy* de la Universitatea din Oxford, acesta ne prezintă cum ar fi efectuat vechii egipteni împărţirea a **9 lipii la 10 oameni**. Astfel, primele cinci lipii erau împărţite în jumătăţi, obţinând o primă serie de 10 jumătăţi (câte o jumătate pentru fiecare om). Următoarele patru lipii erau împărţite în treimi, obţinând 12 treimi. Zece treimi erau puse de-o parte (câte o treime pentru fiecare om), pe când ultimele două treimi erau fiecare împărţite în câte cinci părţi egale, adică în cincisprezecimi, obţinând astfel încă zece cincisprezecimi (câte una pentru fiecare om).
Putem efectua "operaţia" tăind lipii în clasă, concret în faţa elevilor. Apoi trebuie însă să facem şi următoarea formă scrisă pe tablă, pentru ca elevii să aibă şi această lecţie în caiet.

10 treimi



5 lipii = 10 jumătăţi 2 treimi = 10 cincisprezecimi

Deci 9 **:** 10 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, aşa că fiecare din cei zece oameni primeşte:

În limbajul nostru putem efectua imediat o verificare:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} + \frac{2}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

Dacă studiem atent problema, găsim şi o altă descompunere pentru fracţia $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, dar vechi egipteni nu ar fi ales aşa ceva, considerând trivială repetarea unei fracţii (la fel ar fi fost considerată şi varianta cu repetarea de nouă ori a zecimii).

Scurt istoric

În 1858 anticarul Henry Rhind a achiziţionat în Egipt un papirus, care din 1865, după moartea sa, a ajuns în custodia British Museum din Londra. Numit şi papirusul Ahmes (Ahamesu), după scribul care l-a redactat sau l-a copiat (cca. 1650 î.Chr), acesta reprezintă una dintre cele mai importante surse despre nivelul cunoştinţelor matematice din Egiptul antic. Acest papirus a fost descifrat de către profesorul August Eisenlohr de la Universitatea din Heidelberg. Un alt papirus foarte cunoscut în lumea matematicii este papirusul de la Moscova (cca. 1850 î Chr.).
În papirusul Rhind, în cartea I se găsesc următoarele hieroglife pentru fracţiuni:

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ …. $\frac{1}{21}$

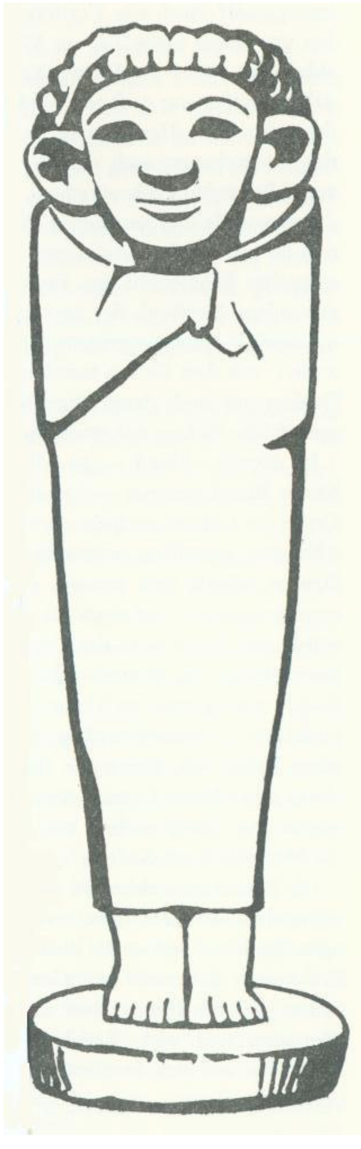
Egiptenii foloseau aceste scrieri pentru fracţii cu numărătorul 1 (jumătate, treime, sfert, cincime etc.). Vom denumi fracţiile 1/n ca ***fracţiuni*** sau ***fracţii unitare***, dar se mai numesc şi *fracţii alicote*. În engleză se foloseşte denumirea *unit fractions*, în germană *Stammbrüche*

(fracţii de bază, într-o traducere relativă), iar în franceză *fractions unitaires*. Astfel, prin fracţiune trebuie să înţelegem “o parte din” sau “a *n*-a parte din”. Egiptenii scriau asta punând o “gură” (hieroglifa pentru gură) şi sub aceasta numărul în care trebuia împărţit întregul.
În cazuri speciale, în scrierile egiptene se mai foloseau şi hieroglife prezentate alăturat:

Scrierea fracţiilor

Este evidentă dificultatea întâmpinată de vechii egipteni în scrierea unor cantităţi pe care noi le-am reprezenta simplu sub forma unor fracţii cu numărătorul diferit de 1. Neavând o scriere pentru astfel de mărimi, egiptenii le reprezentau ca sumă de diferite fracţiuni. Astfel, un exemplu de scriere a fracţiilor este $\frac{8}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, prezentat cu hieroglife astfel:

În papirusul Rhind exista chiar un fel de tabel cu descompuneri ale fracţiilor de tipul $\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{7},\frac{2}{9},.....,\frac{2}{101}$ în fracţiuni. Într-o traducere relativă vechii egipteni exprimau aceasta astfel: *prezintă 2 prin 3, prezintă 2 prin 5* etc. Astfel, putem desigur verifica următoarele descompuneri adunând fracţiile:



$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$
…………
$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$$
…………
$$\frac{2}{29}=\frac{1}{29}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{174}$$
……………
$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$
……………
$$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$$
………………
$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$$

În general erau păstrate aceste descompuneri, dar uneori se găsesc şi alte variante, cum ar fi următoarele:

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232} \text{ sau } \frac{2}{29}=\frac{1}{20}+\frac{1}{58}+\frac{1}{580}.$$

Remarcabil este că nu doar pentru fracţii de tipul 2/n existau astfel de descompuneri, ci şi pentru alte fracţii, ca de exemplu:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$
$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$
$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$$
$$\frac{7}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$$
$$\frac{7}{19}=\frac{1}{3}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1653}$$
$$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$$

Una din primele întrebări ce ne vine în minte la vederea acestor descompuneri este evident următoarea: cum se pot obţine acestea? O variantă ar fi folosind scrierea modernă cu tot aparatul de calcul cunoscut. De exemplu:

$$\frac{7}{9}=\frac{6}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{6}+\frac{1}{9}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$$

O altă cale ar fi să găsim modalităţi de reprezentare grafică a fracţiilor, adică “să tăiem lipii”. Uneori putem avea surpriza să găsim cu totul alte rezultate decât cele găsite de vechii egipteni. De exemplu, $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ din reprezentarea alăturată:

Teme de lucru individual

1) Verificaţi descompunerile de mai sus, efectuând adunările de fracţiuni.

2) Pe lângă descompunerea $\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ dată mai sus, la această fracţie se mai pot găsi şi alte descompuneri. Verificaţi-le pe rând pe toate: $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}+\frac{1}{35}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{110}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{60}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$.

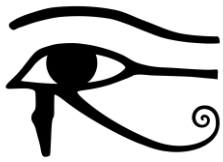
3) Împărţiţi: **a)** 3 lipii la 5 oameni; **b)** 5 lipii la 6 oameni; **c)** 7 lipii la 8 oameni. Încercaţi să daţi la fiecare cel puţin două, chiar trei soluţii diferite.

4) Despre ce fracţii este vorba în următoarele descompuneri scrise cu hieroglife?

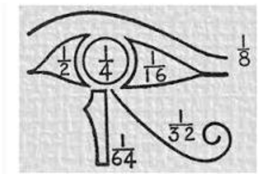
a)  **b)** 

5) Scrieţi descompunerea lui: **a)** $\frac{2}{5}$ ca $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$; **b)** $\frac{2}{9}$ ca $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$, folosind hieroglife.

6) Stabiliţi ce fracţie înseamnă $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{72}+\frac{1}{576}$.



7) Horus, cel reprezentat cu cap de vultur, era unul dintre cei mai importanţi zei în Egiptul antic. Ochiul lui Horus sau al treilea ochi era reprezentarea pentru “întreg” sau “totul”, mai exact “aproape totul”. Calculaţi, pe baza informaţiilor din figura alăturată ce însemna acest “aproape totul”, adică $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$, şi cât era cantitatea neglijată. Aceste fracţiuni erau considerate ca reprezentând, în ordine, mirosul, văzul, gândul, auzul, gustul şi atingerea.



8) La vechii egipteni n-ar fi apărut nici o dată următoarele scrieri ca descompuneri de fracţii. De ce oare? **a)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; **b)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$.

9) Completaţi şirul de fracţii: $\frac{5}{6};\frac{7}{12};\frac{9}{20};\ldots\ldots$ cu următorii doi termeni şi descompuneţi apoi fiecare din aceşti primii cinci termeni ca sumă de două fracţiuni. Fracţiile de mai sus apar în vechea problemă despre taurii lui Helios (vezi B.3, pag.21).

Bibliografie

B1) *ERNST BINDEL – Altägyptische Bruchrechnung*, Erziehungskunst, Nr.11-1961
B2) *ERNST BINDEL – Das Rechnen*, Stuttgart, 1966
B3) *FLORICA T. CÂMPAN – Povestiri despre probleme celebre*, Ed.Albatros, 1987
B4) *MARCUS DU SAUTOY - The Story of Maths***,** reportaj **BBC** FOUR, 2008
B5) Internet (cuvinte de căutare: *unit fractions*, *Egypt fractions*, *Eye of Horus*, *Moritz Cantor* etc.)

Aspecte metodice

Pentru a înţelege importanţa acestei lecţii, respectiv a acestui tip de abordare a fracţiilor, trebuie să înţelegem ce se întâmplă în mintea copilului în funcţie de modul nostru de predare: îi predăm ca să înţeleagă sau îi predăm ca să ne parcurgem materia. Nu intru în respectiva dezbatere, ci sar direct la concluzii şi plec de la premisa că cititorul este convins de importanţa primei alternative. Mă rezum la a menţiona doar un avantaj al predării pentru înţelegere: dacă elevul a înţeles cum se formează nişte gânduri, o teorie, atunci el nu le va mai uita, uitarea fiind un fenomen legat de nivelul superficial al gândirii. Astfel, elevul va putea oricând să abordeze tema din nou, proaspăt, ca şi cum tocmai ar fi învăţat acele conţinuturi de curând.
Din acest punct al pledoariei nu ne este greu să ajungem la următorul nivel de concluzie: cea mai bună cale pentru a preda anumite conţinuturi este să ne structurăm lecţia asemenea parcursului istoric al descoperirii respectivelor conţinuturi. La fel ca mintea elevului de azi, mintea oamenilor din vechime nu avea de la început aceste cunoştinţe şi este de presupus că forma, calea în care au fost descoperite a fost cea mai lesne, cea mai potrivită acelui moment şi acelei teme. Nu trebuie să absolutizăm acest principiu, dar este evident că putem veni în întâmpinarea minţii elevului de azi, înţelegând cum au gândit primii oameni o anumită temă. Acest principiu reprezintă şi motivul de bază pentru introducerea lecţiei despre teoria fracţiilor în Egiptul antic. Abordarea lecţiei face o legătură organică între primele lecţii despre fracţii din clasa a IV-a, cu o sumedenie de reprezentări geometrice ale fracţiilor, pe de-o parte, şi abordarea prin scrierea abstractă din clasele V – VI, în care elevul primeşte regulile de operare şi trebuie să le înveţe, de cele mai multe ori fără să ştie, sau fără să fie interesat să ştie, de ce se face aşa.
În acest moment ajungem în miezul noţiunii de fracţie, anume la înţelegerea modului de devenire al unei fracţii. Primul pas este fragmentarea unui întreg într-un număr de părţi egale, într-un număr de fracţiuni. Apoi, o parte din acestea încep procesul invers de reunire. De exemplu, întregul este împărţit într-o primă etapă în şeptimi, care apoi încep să se reunească până la un punct, când avem să zicem cinci şeptimi; sau poate se lipesc mai multe decât au fost într-un întreg şi obţinem să zicem nouă şeptimi. Fracţiile egiptene surprind chiar punctul de după primul pas, adică momentul dinaintea pasului de reîntregire. Este acel moment “magic” când fracţiunile de toate mărimile “sunt împrăştiate de-a valma pe masă” şi încep să se adune “la întâmplare” pentru a forma anumite mărimi. Tratarea vechi-egipteană a fracţiilor are un caracter de “repetecire” ca tendinţă opusă a fracţionării, spre refacerea întregului. Este sănătos ca elevii să zăbovească o oră, două, în acest stadiu, înainte de a merge mai departe pentru a perfecţiona tehnica oficială de calcul spre automatism.
Este evident pentru oricine că forma prezentată mai sus pentru subiectul fracţiilor în Egiptul antic este o formă mult simplificată şi adaptată nevoilor şi gândirii noastre. O seamă de aspecte mult prea complicate ale subiectului au fost desigur lăsate de-o parte. De pildă, felul în care gândeau vechi egipteni pentru a obţine aceste descompuneri este prea alambicat şi prezentarea acestui tip de raţionament a fost evitată.
Dimpotrivă, am scos în evidenţă un fapt colateral pentru egipteni, anume că descompunerile respective nu sunt unice. Astfel, diferitele descompuneri lasă loc unei libertăţi pline de subiectivism, de care matematica duce în general lipsă, dar care-i bucură mult pe elevi.
Un aspect interesant despre gândirea din acele vremuri antice merită totuşi a fi amintit aici: 44 din cele 49 de descompuneri găsite în papirusul Rhind încep cu prima fracţie “pară”.
În final amintesc în treacăt şi alte aspecte metodice legate de această lecţie. Este evident caracterul de interdisciplinaritate al acestei lecţii: cu greu poţi găsi un *melange* mai bun între matematică şi istorie. Dimpotrivă, trebuie să aruncăm un ochi mult mai atent asupra temelor de lucru propuse pentru acasă, încât să observăm şi problematizarea, mai exact împingerea elevului spre activitatea de descoperire a noi aspecte ale acestui subiect.

Cluj, dec. 2014, Prof. C.Titus Grigorovici

Post Scriptum – Fracţii egiptene

Ca o continuare a celor de mai sus, iată încă trei studii interesante, prezentate ca probleme:
10) În completarea şi ca răspuns la **problema nr. 8)** putem preciza următoarele: numerele 6 şi 28 sunt aşa-numite ***numere perfecte***, numere care sunt egale cu suma divizorilor lor. Concret, 6 = 1 + 2 + 3, respectiv 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 (toţi divizorii în afară de numărul însuşi). Aceste două numere perfecte erau cunoscute lui Pitagora, cel care le-a comparat cu rarii oameni perfecţi, desigur pe baza acestor calităţi de excepţie. Astfel, majoritatea numerelor sunt *subperfecte* pentru că au suma divizorilor mai mică decât numărul însuşi (1 + 2 + 5 < 10, la fel ca majoritatea oamenilor ce se laudă peste nivelul lor real); dimpotrivă, există însă şi numere *supraperfecte*, cele la care suma divizorilor este mai mare decât numărul dat (de exemplu la 12 avem 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12, la fel ca la acei oameni modeşti, al căror nivel real este mult peste ce declară ei despre sine). Plecând de la aceste consideraţii filozofice moştenite de la Pitagora, matematicienii au căutat şi alte *numere perfecte*. Nicomah, în secolul I d.Chr. a găsit următoarele numere perfecte, anume 496 şi 8128 (următoarele depăşesc ca mărime nivelul nostru de interes). Dar de unde cunoştea Pitagora aceste proprietăţi, ce apar atât de rar la numere? Pe baza celor două exemple prezentate la problema 8) putem concluziona că vechi egipteni se întâlniseră cu aceste cazuri excepţionale, care pentru ei nu prezentau însă vre-un interes, pentru că sumele respective dau rezultatul 1 (pe când ei căutau rezultate ceea ce numim noi azi fracţii ordinare subunitare). Or, se ştie că Pitagora a fost ani buni "la studii în Egipt", preluând de la preoţii egipteni cunoştinţele matematice ale acestora. Astfel, în aceeaşi linie cu sumele de la problema 8), putem da şi următoarea sumă pe baza numărului perfect 496:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=1.$$

Un exerciţiu similar pe baza numărului perfect 8128 depăşeşte totuşi nivelul preocupaţional legat de fracţii, atât la vechii egipteni, cât şi la elevii din vremurile noastre. Revenind la Pitagora, el nu a continuat linia de preocupări despre fracţii de la egipteni, ci a deschis o nouă linie în acest sens, anume cea despre rapoartele numerelor. Cele două linii – fracţiile ca mărimi şi rapoartele dintre două numere – au ajuns la un echilibru în conştienţa lumii matematice de-abia după Renaştere.

11) În problemele **8)** şi **10)** am construit sume de fracţii unitare pe baza divizorilor numerelor perfecte. Dacă vrem să mai facem un pas, putem să ne inspirăm din numerele prietene (amiabile). Prima pereche de numere prietene este (220; 284), cunoscute şi acestea de către Pitagora, dar ajunse la mare cinste şi în lumea savanţilor arabi. Ele au proprietatea că fiecare este egal cu suma divizorilor celuilalt (cu 1, dar fără numărul însuşi). Astfel obţinem de calculat următorul exerciţiu, un pic înspăimântător, dar cu un rezultat absolut remarcabil:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{44}+\frac{1}{55}+\frac{1}{110}+\frac{1}{220}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{71}+\frac{1}{142}+\frac{1}{284}\right)$$

12) În lucrarea *Din spectacolul matematicii* (Ed.Albatros, colecţia Liceum, 1983) autorul *Gheorghe Păun* ne prezintă la pag.156 o problemă din *The American Mathematical Monthly*, 86, no.3 din 1979, referitoare la fracţiile egiptene: **să se găsească o mulţime finită S de numere naturale astfel încât pentru orice *n* din S, sau *n – 1* sau *n + 1* se găseşte în S** (condiţia 1) **şi suma inverselor acestor numere (*1/n*) să fie un număr întreg** (condiţia 2, ce face trimitere clară către fracţiile egiptene). În revista amintită sunt prezentate şi două soluţii ale problemei (vezi S_1 şi S_2). Verificaţi cele două soluţii şi, în măsura în care vă ţin puterile, căutaţi şi altele noi.

$$S_1 = \{1, 2, 7, 8, 13, 14, 39, 40, 76, 77, 285, 286\},$$
$$S_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 17, 18, 34, 35, 84, 85\}.$$

Alte informaţii despre fracţiile egiptene se găsesc şi în diferite lucrări de *Istoria matematicii*. Dau aici două exemple: *Nicolae Both – Istoria matematicii*, Ed.Alc Media Grup; *Adrian C.Albu – O istorie a matematicii până în secolul VI (XIII)*, Ed. Nomina. Fiecare aduce noi informaţii la această temă.

Integrarea fracţiilor egiptene în predarea fracţiilor la clasă

Este evident că forma acestei lecţii mai sus prezentată este potrivită mai mult ca o curiozitate, de oferit celor care deja cunosc şi stăpânesc adunarea fracţiilor. Materialele oferite în exerciţiile 8, 10 şi 11 au făcut de exemplu deliciul elevilor buni din clasa a VI-a, undeva spre finalul semestrului I, atunci când deja erau încălziţi bine în această direcţie.
Dar oare, cât de repede putem folosi fracţiile egiptene în predarea la clasă? Cu condiţia să fim pregătiţi să adaptăm lecţia din primele momente, dar şi să ne adaptăm propria noastră predare la noile personaje matematice, cu aceste condiţii deci, putem introduce aceste fracţii din prima oră a capitolului despre fracţii din clasa a V-a (voi explica pe parcurs de ce nici nu ar trebui introduse de către învăţătoare în clasa a IV-a).
Să încerc deci o prezentare pe scurt a felului în care am predat în anul aceasta (martie 2015) fracţiile ordinare la clasa a V-a. În principiu, am dat foarte multă atenţie introducerii vizuale a diferitelor fracţiuni şi fracţii în toate formele geometrice imaginabile la această vârstă. Un copil a şi observat că *aceasta este de fapt lecţie de clasa a IV-a*. Da, exact asta am şi vrut: să nu-i supun pe elevi de la început un şoc, ci să-i iau de acolo de unde îi lăsase învăţătoarea. Desigur că exemplele parcurse au depăşit curând nivelul şi limitările casei a IV-a, dar în principiu, m-am străduit să revin cât de des posibil în lecţiile următoare la reprezentarea grafică a fracţiilor.
Deşi am început cu o varietate largă de reprezentări, curând – după primele două lecţii – la exemplele folosite s-au cristalizat două principale forme de reprezentare grafică: cea în cerc (împărţirea discului, adică tăiatul lipiilor) şi cea lineară a dreptunghiului (noi îi spuneam tăierea cozonacului). Prima este foarte clară vizual şi permite cuplarea unor fracţiuni diferite, pe când a doua este practică la fracţiile *mai nepractice*, acolo unde nu putem împărţi cercul cât de cât exact, „din ochi” (de pildă la noimi). Oricum, elevii au învăţat să le folosească bine pe amândouă (ocazional şi alte forme), având astfel la toţi paşii făcuţi cu fracţii ordinare o imagine foarte clară despre ce reprezintă aceşti paşi (de pildă la amplificarea fracţiilor unde, de exemplu amplificarea cu trei înseamnă de fapt împărţirea fiecărei fracţiuni în trei părţi egale).
Doresc să evidenţiez acest principiu de predare, prin care elevii înţeleg în profunzime de ce se procedează într-un anumit fel la o lecţie. Ei nu învaţă *papagaliceşte* o regulă dată de profesor, ci o deduc singuri (frontal, prin cercetare îndrumată şi *brainstorming* din belşug).

Reprezentarea grafică a fracţiilor a reapărut ocazional şi la studiul fracţiilor zecimale, şi sunt convins că ne va fi de folos în acelaşi fel şi la studiul înmulţirii şi împărţirii de la începutul clasei a VI-a.
Revenind la fracţiile egiptene, acestea au apărut în predare în două-trei momente. În primul rând ca o curiozitate de scriere ce apărea sporadic prin exerciţii; elevilor le plăcea să ne jucăm de-a egiptenii, scriind cu hieroglife (şi le ştiau foarte bine!). În al doilea rând, mult mai important, fracţiile egiptene au apărut prin reprezentarea lor grafică ca exerciţii deosebite a reprezentării grafice a fracţiilor. Concret, diferitele sume de la paginile 2-3, cu fracţiunile accesibile de reprezentat grafic (cu numitori mici), au fost verificate ca atare mult înainte de învăţarea paşilor oficiali de adunare, doar prin simpla reprezentare grafică. Desigur că la lecţia despre adunarea fracţiilor am avut prin aceste exerciţii o bază solidă de lucru pentru stabilizarea paşilor ce trebuiau învăţaţi.
Iată în continuare **ordinea lecţiilor din acest semicapitol**:

1. Fracţiuni: reprezentarea grafică a fracţiunilor (jumătatea, treimea, …, doisprezecimea); scrierea fracţiunilor în Egiptul antic.
2. Fracţii ordinare: exemple cu reprezentare grafică; termenii unei fracţii ordinare (numitor şi numărător); problema împărţirii a 9 lipii la 10 oameni (cu realizare practică în faţa clasei tăind lipiile cu foarfeca). La temă s-au rezolvat situaţii similare: 7 lipii la 8 pers; 3/5; 5/6.
3. Tipuri de fracţii ordinare: subunitare; echiunitare; supraunitare (exemplele 7/9; 9/9; 13/9, reprezentate grafic cu ajutorul pătratului împărţit în 3x3 pătrăţele).

4. Amplificarea şi simplificarea fracţiilor ordinare (funcţionează foarte bine cu reprezentarea grafică în disc).
5. Scoaterea întregilor dintr-o fracţie supraunitară; introducerea întregilor într-o fracţie.
6. Compararea fracţiilor (diverse metode, inclusiv aducerea la numitor comun; vezi anexa).
7. Adunarea şi scăderea fracţiunilor (fracţiilor unitare) prin aducerea la numitor comun cu amplificare; aici apar din nou fracţii egiptene, de data asta ca exerciţii de aducere la numitor comun în vederea adunării, inclusiv proba la problemele practice de împărţire a 9 lipii la 10 oameni etc. din prima parte a capitolului. Este evident că această lecţie o trage după sine şi pe următoarea.
8. Adunarea şi scăderea fracţiilor ordinare. La această lecţie elevii lucrează deja automat, prin metoda clasică de aducere la numitor comun prin amplificare. Diferenţa faţă de abordarea obişnuită este însă aceea că aici elevii înţeleg cu adevărat fracţiile ordinare şi ştiu la fiecare pas ce se întâmplă şi de ce.

O întâmplare inedită a avut loc în lecţia a 7-a, în timp ce verificam prin aducere la numitor comun diferite descompuneri egiptene: la exemplul $\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}$ (din varianta iniţială a prezentului eseu) am constatat că acesta era greşit. La lucrarea de control am propus elevilor să corecteze această descompunere prin reprezentarea grafică în cerc a fracţiei 5/7 (aşa cum ar fi făcut-o vechii egipteni), plecând de la bănuiala că fracţiunea 1/15 este incorectă. Acesta a fost cel mai greu punct al testului, dar un elev tot l-a făcut. Acest exemplu ne arată cum se pot da elevilor probleme grele, fără a fi „împrumutate" din clase mai mari (ca la olimpiade).

Am rămas dator cu o explicaţie: de ce fracţiunile, adică fracţiile egiptene, nici nu ar trebui introduse de către învăţătoare în clasa a IV-a. O explicaţie exterioară matematicii ar fi că în clasa a V-a se pot face conexiuni frumoase cu învăţarea Egiptului antic la istorie.

O explicaţie mai apropiată de metodica matematicii reiese din implicaţiile înţelegerii fracţiunilor şi a abordării fracţiilor la vechii egipteni pentru operaţia de adunare a fracţiilor. Dar şi amplificarea, simplificarea şi compararea fracţiilor beneficiază indirect de înţelegerea fracţiilor oferită de fracţiuni. Este deci important ca profesorul să îşi facă lecţia cu fracţiuni, pentru a fi sigur că o are predată aşa cum trebuie şi a putea face trimiterile necesare.

O ultimă explicaţie este tot de ordin metodic: jocul cu fracţiunile şi fracţiile egiptene îi oferă profesorului posibilităţi largi de a zăbovi fără plictiseală în zona intuitiv-vizuală de la începutul capitolului, venind astfel în întâmpinarea elevului rămas la fracţii acolo unde l-a lăsat învăţătoarea sa. Astfel, elevul urcă fără şocuri majore de la nivelul matematic al învăţătoarei la nivelul profesorului de matematică.

ANEXĂ: Compararea fracţiilor ordinare - Un studiu al diferitelor metode

Elevii vin din clasa a IV-a cu o parte din această lecţie învăţată. Dacă se începe capitolul de fracţii ordinare cu o preocupare intensă pentru reprezentarea fracţiunilor şi a fracţiilor în diferite forme geometrice (părţi din disc-lipii, pătrat, dreptunghi, triunghi etc.) şi se folosesc acestea în diferite probleme de pătrundere a fenomenului, atunci elevii vor enunţa de la sine – adică din înţelegere şi din amintiri din clasa a IV-a – primele criterii de comparare a fracţiilor ordinare. Deci primele criterii ar trebui să fie enunţate de către elevi, profesorul dând doar la început exemple cu semnul întrebării.

1) **Fracţii cu acelaşi numitor:** dacă două fracţii au acelaşi numitor, ordinea este aceeaşi cu ordinea numărătorilor. Exemple: $\frac{2}{5}?\frac{3}{5}$; $\frac{7}{12}?\frac{5}{12}$.
2) **Fracţii cu acelaşi numărător:** dintr-un exemple bine alese elevii vor putea explica faptul că dacă două fracţii au acelaşi numărător, atunci ordinea lor este inversă ordinii numitorilor. Exemple: $\frac{1}{4}?\frac{1}{6}$; $\frac{3}{7}?\frac{3}{8}$.

3) **Diferite metode grafice:** de exemplu, fracţiile $\frac{3}{5}$ şi $\frac{4}{7}$ se pot compara reprezentându-le grafic prin împărţirea unui dreptunghi cu lăţimea de 5 şi lungimea de 7 pătrăţele. Pentru prima fracţie împărţim întregul **pe lăţime** în cinci fâşii din care haşurăm cu o culoare trei fâşii, iar pentru a doua fracţie împărţim întregul **pe lungime** în şapte fâşii din care haşurăm cu altă culoare doar patru fâşii. În final avem dreptunghiul întreg împărţit de fapt în 35 de pătrăţele şi trebuie doar să numărăm câte sunt mai multe, cele din prima sau cele din a doua culoare. Este clar că această metodă deschide uşa pentru aducerea la numitor comun, dar este recomandabil să lăsăm spre final metodele foarte generale (cunoscând o metodă generală, elevul va accepta mai greu alte metode particulare; în acest caz nu ne putem atinge unul dintre obiectivele majore ale unui învăţământ sănătos: deschiderea cât mai largă a minţii elevului).
4) **Fracţie subunitară < fracţie supraunitară:** dacă au înţeles cele două tipuri de fracţii vor putea rezolva direct şi aceste exemple; apoi se trece în caiet regula.
5) **Compararea fracţiilor subunitare faţă de jumătate:** elevii cu simţul dezvoltat pentru fracţii vor observa uşor dacă o fracţie subunitară reprezintă mai mult sau mai puţin decât jumătate. Exemple: $\frac{4}{7}?\frac{3}{8}$; $\frac{7}{15}?\frac{9}{16}$. În general se poate face **compararea celor două fracţii faţă de o altă cantitate intermediară:** de exemplu putem ordona crescător fracţiile $\frac{2}{3}$ şi $\frac{7}{8}$, comparându-le (eventual grafic) cu fracţia intermediară $\frac{3}{4}$, care este destul de cunoscută şi vizual. Deci $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{7}{8}$. Analog $\frac{1}{3}$ şi $\frac{3}{16}$ pot fi comparate cu $\frac{1}{4}$.
6) **Comparând diferenţele până la un întreg:** în cazul fracţiilor $\frac{11}{12}$ şi $\frac{12}{13}$, diferenţele până la un întreg sunt $\frac{1}{12}>\frac{1}{13}$. Este evident că $\frac{11}{12}<\frac{12}{13}$. La exemplul $\frac{36}{37}?\frac{42}{43}$ iese mai bine în evidenţă această metodă.
7) **Scoţând întregii din fracţie, cu cantităţi de întregi diferite:** în acest caz ordinea este dată de întregi. Exemplu: $\frac{25}{7}?\frac{37}{9}$

8) **Scoţând întregii din fracţie, cu cantităţi de întregi egale:** în acest caz ordinea este dată de părţile fracţionare, după celelalte criterii. Exemplu: $\frac{27}{7}?\frac{35}{11}$
9) **Aducând fracţiile la acelaşi numitor,** prin amplificare sau prin simplificare. Aceasta este lărgirea cadrului de aplicabilitate a primei metode. Pentru deschiderea cât mai clară a gândirii elevilor este evident că trebuie să oferim şi exemple cu simplificare.
10) **Aducând fracţiile la acelaşi numărător,** prin amplificare cât şi prin simplificare. Aceasta este desigur lărgirea cadrului de aplicabilitate a celei de-a doua metode. Această a zecea metodă este importantă, la fel, pentru formarea la elevi a unei gândiri cât mai deschise. Aici este important să alegem exemple la care aducerea la numitor comun să fie mult mai dificilă decât aducerea la numărător comun (din punct de vedere al calculelor).

Despre generarea lecţiei în forma de mai sus merită precizat că, pe lângă metodele pregătite de profesor sau apărute de la elevi la clasă, au apărut idei noi şi la lucrarea de control.

Cluj, apr. 2015, Prof. C.Titus Grigorovici

PS.1. Imaginea scribului este preluată din *Aritmetica distractivă* a lui *I.I.Perelman*, Ed. Tineretului, 1963, pag 70 (*din ţara piramidelor*).

PS.2. În lucrarea lui *Eugen Rusu*, *Problematizare şi probleme în matematica şcolară*, Ed Did. şi ped.1978, pag112, găsim următoarea problemă: Câte soluţii în numere naturale are ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$?