Caietele "Pentagonia" îşi propun să ofere o matematică atractivă şi accesibilă cât mai multor elevi, să prezinte într-un mod liber şi elemente din matematică neincluse în programa şcolară, iar pentru pregătirea în vederea examenelor şcolare să ofere profesorilor şi elevilor seturi de probleme pe diferite teme de interes, dar şi seturi de probleme recapitulative începând chiar din clasa a VII-a.

Astfel, sub titlul "101 probleme de....." vor fi abordate în primele numere teme ca ecuaţii cu module, medii, geometrie plană, ecuaţii cu parametrii, funcţii de gradul I, inegalităţi etc.

Pentagonia se doreşte o publicaţie despre frumuseţea matematicii, despre bucuria ce trăieşte în matematică, în şcoală aceste sentimente fiind constant neglijate, alungate uneori de o matematică mult prea riguroasă, alteori de o ordine a lecţiilor contrară normalului.

*

*

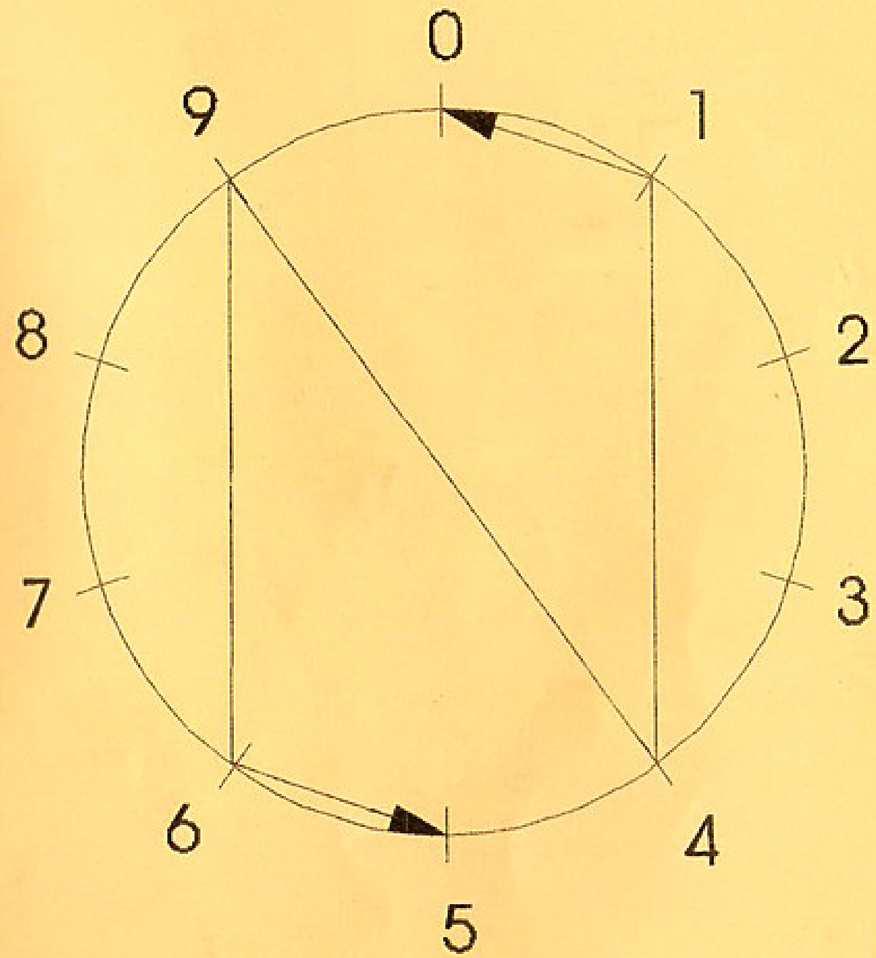
Din numărul următor:

- 10 demonstraţii ale teoremei lui Pitagora
- Pentagonul regulat
- Corpuri regulate înscrise
- Modulul pe înţelesul tuturor
- Apariţia numerelor complexe - introducerea noţiunii prin întrebări
- Iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$
- 101 probleme clasice de geometrie plană

ISBN 973 - 96533 - 0 - 8
EDITURA TRIADE 1998

NUMĂR INAUGURAL IANUARIE 1998

P3NT4GON1A



CAIET TRIMESTRIAL
DE MATEMATICĂ

DE CE PENTAGONIA?

Pentru că Pentagonia este un tărâm de vis în care toţi oamenii iubesc matematica admirându-i zilnic minunăţiile nesfârşite.

Aici au trăit şi au gândit Pitagora şi Thales dar şi Leonardo da Vinci, Carl Friedrich Gauss sau János Bólyai. Toţi aceştia, dar şi mulţi alţii rămaşi anonimi au cunoscut imensa satisfacţie care te cuprinde atunci când reuşeşti să rezolvi o problemă considerată de nerezolvat, şi pe care ai învins-o cu puterea minţii; sau bucuria neţărmuită din momentul când descoperi un colţişor de matematică necălcat până atunci de nimeni.

Cei mai mulţi profesori de matematică au fost în Pentagonia şi povestesc cu drag despre frumuseţile întâlnite acolo. Chiar şi unii elevi au ajuns să cunoască această lume minunată.

Revista de faţă îşi propune să-i ajute pe profesori în predarea matematicii, astfel încât numărul elevilor ce iubesc matematica să fie cât mai mare cu putinţă. Pot fi tratate subiecte total necunoscute, dar şi subiecte demult uitate, poveşti matematice, dar şi teme de actualitate pentru pregătirea examenelor, culegeri de probleme pe o anumită temă sau probleme izolate cu un farmec deosebit, rezolvări seci de calcul, dar şi rezolvări inedite cu ajutorul foarfecii şi al hârtiei, probleme care se rezolvă prin aceeaşi metodă, dar şi mai multe metode de rezolvare pentru o aceeaşi problemă; în fine, cât mai multe din minunăţiile ce pot fi întâlnite în Pentagonia.

CUPRINS

Comenzi, sugestii şi propuneri de probleme sau teme de abordat
sunt aşteptate la adresa redacţiei:
Grigorovici Titus, str. Fabricii nr. 9, ap. 27, 3400 Cluj Napoca sau la
EDITURA TRIADE, CP 1 - 400, 3400 Cluj Napoca.

CUM A DESCOPERIT PITAGORA TEOREMA SA

Basm Matematic de Guido Hauck*

Demult, în vechea Grecie, exista în apropierea oraşului Croton o colonie de vile, cu numele Trigonia. Comunitatea era alcătuită doar din triunghiuri dreptunghice. Fiecare triunghi avea o ipotenuză şi două catete, care formau împreună o familie. Capul familiei era ipotenuza. Unele dintre triunghiuri erau isoscele: acestea erau triunghiurile mai mobile. Altele aveau cele două catete de diferite lungimi.

Într-o zi s-a întâmplat să se işte în triunghiul isoscel o ceartă între ipotenuză şi catetele sale. Catetele au explicat că nu vor să se lase dădăcite de către ipotenuză, că ele împreună ar fi mai lungi decât ipotenuza. Chiar întreaga stabilitate a triunghiului dreptunghic s-ar sprijini pe ele, deoarece ele închid unghiul drept. Ipotenuza pretindea în schimb că ei i s-ar cuveni mult mai mult meritul principal în menţinerea triunghiului, căci dacă ea n-ar subîntinde catetele, trăinicia unghiului drept s-ar risipi de îndată.

În acea vreme trăia în Croton un om înţelept pe nume Pitagora. El era un mare prieten al triunghiurilor şi în fiecare seară el se plimba la Trigonia unde se întreţinea mult cu prietenele sale. De fiecare dată când trecea seara pe lângă triunghiul isoscel în care domnea discordia şi auzea gălăgia, se oprea în loc şi întreba despre motivul certei. După ce a aflat care este acest motiv spuse catetelor: "Nici nu se pune problema câtuşi de puţin dacă voi împreună sunteţi mai mari decât ipotenuza, ci importantă este valoarea interioară a fiecărei din voi, care se măsoară după capacitatea de muncă. Dacă deci ar fi să aplanez cearta voastră, ar trebui să vă văd la treabă. Deci iute! Puneţi-vă şorţurile de lucru şi să vedem ce se întâmplă".

Certăreţii îl priveau miraţi şi spuseră cu voce tare: "Şorţuri de lucru? Nu avem aşa ceva."

Pitagora însă exclamă: "Ce? Nu aveţi şorţuri? Numai şorţul de piele dă omului valoarea sa. Fără acesta el este un pierde-vară. Veniţi imediat cu mine la tăbăcar. Vreau să vă ajut să căpătaţi nişte şorţuri."

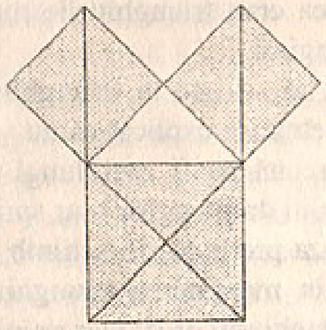
Tăbăcarul n-a mai avut însă în magazie nişte bucăţi de piele aşa mari

* GUIDO HAUCK (1845 - 1905) - profesor de geometrie descriptivă: primul rector al Universităţii Tehnice din Berlin

încât să poată croi din ele un şorţ ca lumea. Mai rămăseseră nişte resturi mici aruncate, cel mai mare de mărimea triunghiului însuşi.

"Nu face nimic, spuse Pitagora, vom coase atunci mai multe bucăţi împreună. Pentru a obţine însă doar bucăţi riguros egale între ele vom folosi triunghiul însăşi ca şablon". Asta a şi făcut şi a croit 8 triunghiuri dreptunghice isoscele, toate de aceeaşi mărime cu modelul.

Dintre aceste 8 triunghiuri a luat 4 şi le-a cusut împreună catetele, astfel încât ipotenuzele să vină în exterior iar la capetele acestora câte două unghiuri ascuţite să formeze un unghi drept. În felul acesta a obţinut un şorţ de forma unui pătrat, cu latura egală cu ipotenuza.Pe acesta l-a legat la brâul ipotenuzei.



Din celelalte patru triunghiuri rămase a cusut împreună câte două de-a lungul ipotenuzei, obţinând astfel două şorţuri pătrate cu latura egală cu a unei catete, pe care le-a încins în jurul celor două catete (fig).

După aceea spuse: "Ia priviţi-vă acum şorţurile voastre, sunt toate pătrate, pătratul ipotenuzei are 4 triunghiuri, iar cele două pătrate ale catetelor au împreună de asemenea 4 triunghiuri. După şorţurile pe care le aveţi se măsoară valoarea,voastră. Aşadar ipotenuza are aceeaşi valoare cu catetele luate la un loc. De aceea nici una dintre părţi să nu se mai fălească înaintea celeilalte. Fiţi îngăduitoare şi lucraţi împreună în pace şi bună înţelegere."

Asta au promis şi ele, s-au împăcat şi au pornit-o în linişte spre casă lăsând şorţurile să fluture vesele în vânt ca pe nişte steaguri. Celorlalte triunghiuri din Trigonia le-a plăcut aceasta extraordinar de mult, iar când vecinul lor triunghi a aflat de la cine au primit ele frumoasele şorţuri, a luat imediat drumul spre Pitagora şi l-au rugat să-le confecţioneze şi lor şorţuri. Acesta se scărpină în păr şi spuse: "Hm, asta nu va merge la fel de uşor ca la triunghiul isoscel. El avea două catete egale pe când voi aveţi catetele inegale. Dar să încercăm!"

Despre cum a reuşit Pitagora să împace şi celelalte triunghiuri dreptunghice vom povesti în numărul viitor al revistei.

REPREZENTAREA GRAFICĂ PE CERC PENTRU ULTIMA CIFRĂ LA ŞIRURILE DE NUMERE NATURALE

Grigorovici Titus

Fie şirul multiplilor lui 2:

0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; ...; 170; 172; 174; 176; 178; ...

Analizând ultima cifră la numerele acestui şir, observăm că se repetă grupa 0; 2; 4; 6; 8. Ordonând cele zece cifre pe un cerc, putem trasa, pentru şirul numerelor pare, următorul grafic (drum) parcurs de ultima cifră (fig. 1)

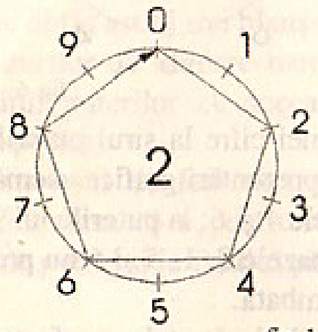


fig. 1

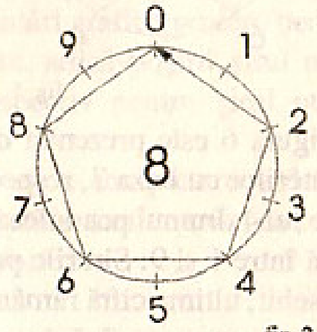


fig. 2

Reprezentând grafic drumul parcurs de ultima cifră la şirul multiplilor lui 8, se obţine acelaşi drum ca la şirul lui 2, parcurs în sens invers.

În acelaşi mod se pot obţine reprezentări grafice pentru şirurile multiplilor lui 3 (fig. 3) sau 4 (fig. 4). La multiplii de 7 se obţine acelaşi drum ca la 3, iar la 6 acelaşi drum ca la 4, parcurse în sens invers.

Reprezentarea grafică pentru ultima cifră la şirul multiplilor lui 9 este aceeaşi cu cea de la şirul multiplilor lui 1.

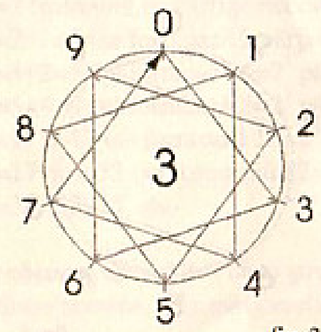


fig. 3

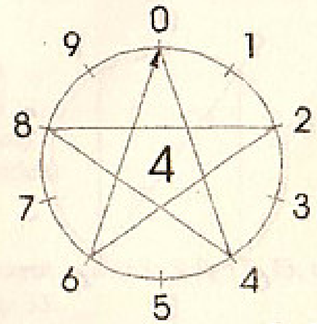


fig. 4

Folosind acelaşi procedeu se pot obţine reprezentări grafice pentru şirurile puterilor unor numere naturale. Pentru puterile lui 2 avem următorul şir: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; ...

Ultimele cifre se repetă în grupa 2; 4; 8; 6 care se reprezintă grafic astfel (fig. 5):

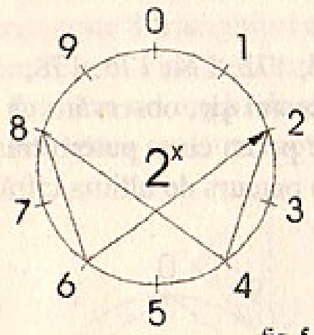


fig. 5

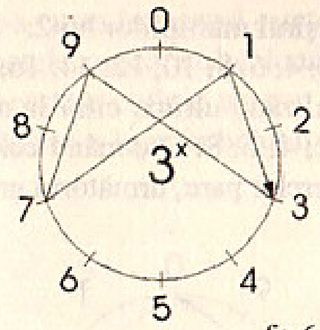


fig. 6

În figura 6 este prezentat drumul ultimei cifre la şirul puterilor lui 3. Şirurile puterilor cu baza 7, respectiv 8 au reprezentări grafice asemănătoare. La puterile lui 4 drumul pendulează între cifrele 4 şi 6; la puterile lui 9 drumul pendulează între 1 şi 9. Şirurile puterilor cu bazele 0; 1; 5 şi 6 nu prezintă un grafic deosebit, ultima cifră rămânând neschimbată.

O reprezentare grafică deosebită are şi şirul pătratelor perfecte: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, ...la care ultimele cifre se repetă în formaţia 0; 1; 4; 9; 6; 5; 6; 9; 4; 1.

Reprezentarea grafică pentru acest şir (fig. 7) evidenţiază următorul aspect: ultima cifră a unui pătrat perfect poate să fie doar 0; 1; 4; 9; 6 sau 5. Un număr care are ultima cifră 2; 3; 7 sau 8 nu este pătrat perfect. Spre exemplu, numărul

$2^{1985} + 1985^2 = ...2 + ...5 = ...7$

are ultima cifră 7, deci nu poate fi pătrat perfect.

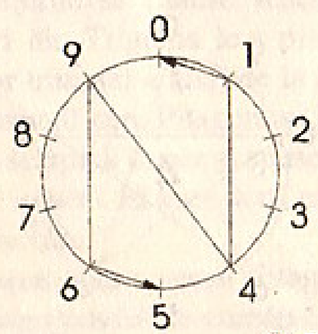


fig. 7

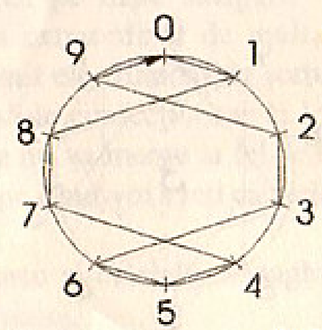


fig. 8

În mod similar se obţine reprezentarea grafică a drumului ultimei cifre pentru şirul cuburilor perfecte (fig. 8). Aplicaţiile de la şirul pătratelor perfecte nu mai sunt posibile la cuburi pentru că graficul trece prin toate cifrele. Aceste aplicaţii se pot relua la şirul puterilor "a patra" unde drumul trece doar prin cifrele 0; 1; 5 şi 6.

Şirul puterilor "a şaptea" are graficul identic cu şirul cuburilor perfecte, iar şirul puterilor "a şasea", cu şirul pătratelor perfecte. Şirul puterilor "a noua" are drumul ultimei cifre identic cu şirul puterilor "a întâia", adică 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.....

Aceeaşi reprezentare grafică se obţine şi la şirul puterilor "a cincea".

O vedere de ansamblu deosebită se poate obţine prin ordonarea pe un cerc mare a celor zece cercuri cu reprezentările grafice obţinute după aceeaşi regulă. Se obţin astfel trei planşe cu reprezentări grafice pe cerc pentru ultima cifră a şirurilor de numere naturale studiate, adică pentru şirul multiplilor, pentru şirul puterilor cu aceeaşi bază, respectiv pentru şirul puterilor cu acelaşi exponent.

Materialul de faţă poate fi folosit ca o completare a lecţiilor din trimestrul I, clasa a 5-a, pentru studiul multiplilor unui număr, ca o aplicaţie a şirurilor de puteri şi la studiul pătratelor perfecte.

PROBLEMA PERDELEI

Toată lumea cunoaşte cât este de dificil să atârne o perdea cu un număr oarecare de cârlige, acestea trebuind să fie plasate echidistant. Pornind de la premisa că este uşor de agăţat un cârlig la mijlocul perdelei, apoi la mijloacele jumătăţilor (la sferturi), apoi la mijloacele sferturilor etc., să se găsească şirul după care poate fi stabilit numărul optim de cârlige necesar unei perdele. Stabiliţi apoi o expresie generală a acestor numere.

REZOLVARE:

$n_0=2$ (minimul de cârlige necesar)

$n_1=2+1=3$ (se formează 2 părţi de perdea)

$n_2=3+2=5$ (se formează $4=2^2$ părţi de perdea)

$n_3=5+4=9$ (se formează $8=2^3$ părţi de perdea)

$n_4=9+8=17$ (se formează $16=2^4$ părţi de perdea)

$n_5=17+16=33$ (se formează $32=2^5$ părţi de perdea)

$n_6=33+32=65$ etc.

Se observă că $n_i=2^i+1$. Deci şirul de numere cerut este 2; 3; 5; 9; 17; 33; 65; 129; 257; 513 etc. Dintre acestea, cele mai practice sunt 9, 17 şi 33.

101 ECUAŢII CU MODULE

Selecţie şi exerciţii de Grigorovici Titus şi Dodu Eugen

Când auzim de ecuaţii cu module, cei mai mulţi ne gândim imediat la explicitarea modulului şi rezolvarea ecuaţiei în toate cazurile posibile. În şcoala generală apar însă ecuaţii cu module cu un grad de dificultate mult redus, rezolvarea lor bazându-se în general pe proprietăţile modulului. Iată în continuare o modalitate posibilă de abordare a acestei teme deosebite, pornind de la cele mai simple ecuaţii cu modul şi ajungând la ecuaţii de grad superior, ecuaţii cu mai multe necunoscute sau sisteme de ecuaţii cu module.

Acest set de exerciţii se poate folosi cu succes în orele de recapitulare de la începutul clasei a 8-a.

Modele de rezolvare:

1). $|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$ sau $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ $S = \{3; -3\}$

2). $|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

3). $|x| = -7$ imposibil pt. că $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow S = \varnothing$.

Exerciţii:

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii:

a). $|x| = 3 + \sqrt{2}$
b). $|x + 2| = 0$
c). $|2x + 7| = 9$
d). $|4x + \pi| = 1$
e). $|x| = -\pi$
f). $|x - 5| + 4 = 0$
g). $2|5 - 2x| - 16 = -2$
h). $-|x + 3| = 5$

2. În rezolvarea ecuaţiilor următoare, folosiţi propoziţiile:

1). Suma a două numere pozitive nu poate fi un număr negativ

2). Suma a două numere pozitive este zero dacă şi numai dacă numerele sunt zero simultan.

a). $|x + 1| + |x + 2| = -7$
b). $|x - 1| + |x - 2| = 0$
c). $|x^2 - 9| + |x + 3| = 0$
d). $|3x - 1| + 2 \cdot |3x - 1| = 12$
e). $|x - 1| + 2 \cdot |1 - x| = 3$
f). $|x - 2| + |x^2 - 4| + |x + 2| = 0$
g). $\dfrac{|x - 2|}{x - 2} = x$

h). $|4 - x| + \pi = 0$
i). $|x| + |x + 1| + \sqrt{2} = 0$
j). $\dfrac{|x - 0{,}5|}{x - 0{,}5} = x$
k). $|2x - 1| = |x + 2|$
l). $|x| = |x + 5|$
m). $|3x + 2| - x = 0$
n). $|x - 1| - |x + 1| = 0$

3. Ştiind că $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbf{R}$, rezolvaţi ecuaţiile:

a). $\sqrt{(x - 16)^2} = 5$
b). $\sqrt{x^2} + \sqrt{144} = 0$
c). $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 12$
d). $\sqrt{-(x + 1)^2} = 0$
e). $\sqrt{-(x - 2)^2} = 10$
f). $\sqrt{x^2} + 3x = 4$
g). $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |4 - x^2| = 0$
h). $\sqrt{x^2 - 2ax + a^2} - |x + a| = 0$
i). $-\sqrt{x^2 + 10x + 25} - |2x - 5| = 5$
j). $\sqrt{(x - 6)^2} = -|x^2 - 36|$

4. Să se rezolve ecuaţiile analizând toate cazurile posibile:

a). $|x - 3| + 2x - 1 = 0$
b). $|x - 3| + |x + 5| = 8$
c). $|2x - 5| - |x + 7| = 3$
d). $|x - \pi| + |x - \sqrt{10}| = 0{,}(1)$

5. Să se rezolve ecuaţiile:

a). $|x| = \sqrt{7} - 3$
b). $|x - 1| = 0$
c). $|x - 2| = 3$
d). $|x| + |x - 1| = 0$
e). $|x - 3| = |x - 2|$
f). $2|x + 5| = |x - 7|$
g). $|-x + 1| = 6|x + 3|$
h). $\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$
i). $|x| + |x^2 - x| = 0$

6. Să se rezolve ecuaţiile cu mai multe necunoscute:

a). $|x - 5| + |y + 3| = 0$
b). $|x - 5| + |x^2 + xy + 7| = 0$
c). $|x - 1| + |x^{10} + x^5 y + 3| = 0$
d). $|x + y| + |2x + 3y + 1| = 0$
e). $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$
f). $\sqrt{y - 2z} + |x^2 - 4| = 6xy - x^2 - 9y^2$
g). $|x - 1| - |y + 1| = 0$
h). $\dfrac{\sqrt{x^2 + 2xy + y^2}}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} + 1 = 0$

$i).\ \dfrac{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}{\sqrt{x^2+4x+4}}-1=0$

$j).\ |x-3|+|x^2-y^2|=0$

$k).\ \left|\dfrac{x-1}{y-1}-\dfrac{1}{5}\right|+\left|\dfrac{x+4}{y+4}-\dfrac{2}{5}\right|=0$

7. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii:

$a).\ \begin{cases} 2|x-1|+3|y+2|=8 \\ -|x-1|+|y+2|=1 \end{cases}$

$d).\ \begin{cases} |x+1|+2|y+7|=1 \\ 5|x+1|-7|y+7|=22 \end{cases}$

$b).\ \begin{cases} 8|x+3|-3|3y-6|=2 \\ 2|2x+6|-15|y-2|+1=0 \end{cases}$

$e).\ \begin{cases} 5|2x+3|-7|5-y|=10 \\ -5|2x+3|+|5-y|=-6 \end{cases}$

$c).\ \begin{cases} 7|x-3|-2|5y|=-3 \\ |3-x|+10|y|=11 \end{cases}$

$f).\ \begin{cases} 2|x|+5|y|=16 \\ 3|x|+y=7 \end{cases}$

8. Găsiţi aria şi perimetrul figurii formată în planul determinat de un sistem de coordonate rectangulare de punctele având coordonatele soluţiile sisistemului a). de la exerciţiul 7:

9. Rezolvaţi ecuaţiile de grad superior:

$a).\ |x-3|^2-4=0$

$e).\ |x-1|^2+a=0; a\in\mathbf{R}, discutie$

$b).\ |x+1|^2+1=0$

$f).\ |x-\sqrt{2}|\cdot(|x+7|-1)=0$

$c).\ |x|^2=9$

$g).\ |x^2-10|=6$

$d).\ |x-\pi|^2-2|x-\pi|=-1$

$h).\ |x|^2+6|x|+9=0$

$i).\ |x|^4+|x^3|+|x|^2+|x|+1=0$

Bibliografie:

(1) D. Crişan; O. Mitrea; P. Horja - CULEGERE DE PROBLEME V -VIII, ARITMETICA ŞI ALGEBRĂ; EDITURA PORUS.

(2) Ioan Dăncilă - Teste pentru fiecare VII - VIII, EDITURA FF PRESS

(3) C. Cărbunaru; I. Cheşcă; V. Mangu; A. Negru; J. Sebestyén - CULEGERE DE PROBLEME ÎN SPRIJINUL ELEVILOR CLASELOR I - VIII, PARTEA A II-A, CLASELE VI - VIII, S.S.M.

CONSTRUCŢIA NUMERELOR IRAŢIONALE

Se presupune ca primul număr iraţional apărut în matematică a fost $\sqrt{2}$ Într-adevăr, calculând lungimea diagonalei unui pătrat de latură a, folosind teorema lui Pitagora, se obţine $d^2=2a^2$. Dacă $a=1$ atunci $d=\sqrt{2}$ şi deci diagonala pătratului este incomensurabilă cu latura sa. Platon era convins că iraţionalitatea numărului $\sqrt{2}$ prezintă o importanţă deosebită în geometrie şi trebuie cunoscută de toţi oamenii, căci, spune el: nu e demn să poarte numele de om acela care nu ştie că diagonala pătratului este incomensurabilă cu latura sa.

Teorema lui Pitagora ne conduce astfel la segmente incomensurabile, deoarece nu se poate găsi o măsură comună pentru latura şi diagonala unui pătrat.

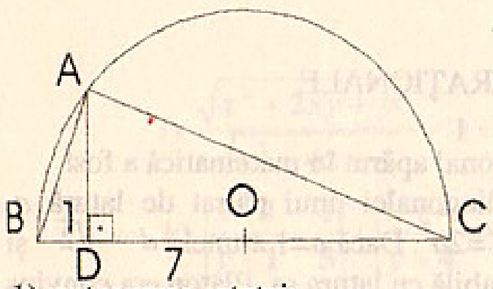
Astfel de numere erau considerate în vremea lui Pitagora ca inaccesibile gândirii umane. Numărul $\sqrt{2}$ nu putea fi exprimat ca raport a două numere întregi, oricare ar fi fost aceste numere. Dar această constatare era în contradicţie flagrantă cu ideea pe care se sprijină întregul edificiu al şcolii pitagoreice, care susţine că la baza tuturor lucrurilor stă numărul întreg. Descoperirea segmentelor incomensurabile chiar de către pitagoreici a fost mult timp ascunsă şi păstrată ca un mare secret. Pe baza unei legende se spune că HIPPASOS din METAPONT, unul dintre adepţii şcolii lui Pitagora, a fost pedepsit de zei (murind în urma unui naufragiu) deoarece a divulgat taina descoperirii numerelor incomensurabile.

*

În clasa a 7-a, trimestrul 2, elevii cunosc deja numerele iraţionale, putând chiar să efectueze calcule complicate cu acestea. La acest moment însă, lor le este străină istoria apariţiei acestor numere în matematică.

Manualul de geometrie din clasa a 7-a pune pe ultimul plan originea acestor numere şi construcţia lor. Singura excepţie o reprezintă spirala lui Arhimede care construieşte numerele iraţionale printr-o succesiune de triunghiuri dreptunghice având una dintre catete de lungimea 1. Acest procedeu este însă destul de anevoios, pentru $\sqrt{7}$, de exemplu, fiind necesară construcţia a şase triunghiuri succesive.

Din punct de vedere practic, sunt mult mai simple construcţiile bazate pe teorema catetei sau teorema înălţimii. Iată cum poate fi construit un segment de lungime $\sqrt{7}$ prin metoda folosită de Leonardo da Vinci:

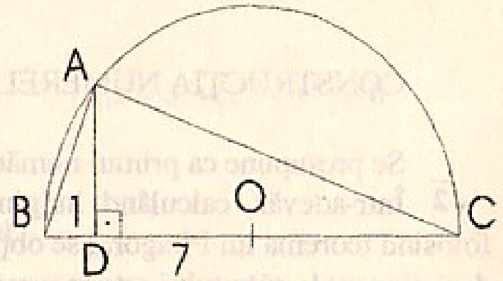


1) cu teorema catetei:

ΔABC *dreptunghic*, $AD \perp BC$,

$BC = 7, BD = 1 \Rightarrow AB^2 =$

$= BC \cdot BD = 7 \Rightarrow AB = \sqrt{7}$



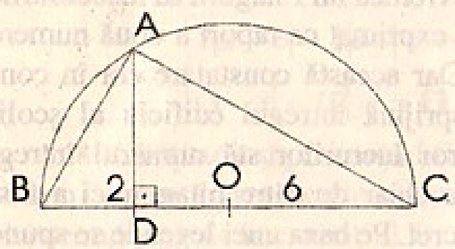
2) cu teorema înălţimii:

ΔABC *dreptunghic*, $AD \perp BC$,

$BC = 7, BD = 1 \Rightarrow AD^2 =$

$= BD \cdot DC = 7 \Rightarrow AD = \sqrt{7}$

La numerele neprime se pot face chiar mai multe construcţii. Să construim ca exemplu segmentul de lungime $\sqrt{12}$

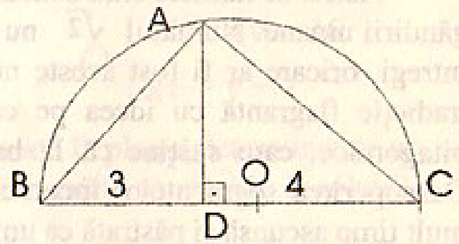


1) cu teorema catetei:

ΔABC *dreptunghic*, $AD \perp BC$,

$BD = 2, BC = 6 \Rightarrow AB^2 =$

$= BC \cdot BD = 2 \cdot 6 = 12 \Rightarrow AB = \sqrt{12}$



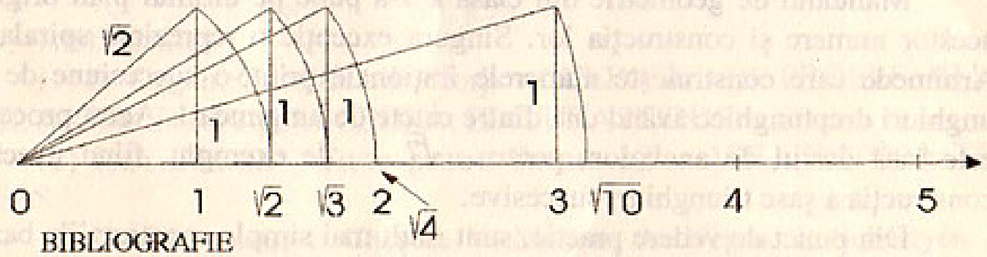
2) cu teorema înălţimii:

ΔABC *dreptunghic*, $AD \perp BC$,

$BD = 3, DC = 4 \Rightarrow AD^2 = BD \cdot$

$\cdot DC = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow AD = \sqrt{12}$

Revenind în final la spirala lui Arhimede ca aplicaţie grafică a teoremei lui Pitagora, propunem aici o alternativă a acesteia, şi anume construirea numerelor iraţionale pe axa numerelor reale.



BIBLIOGRAFIE

(1) Mihu Cerchez - PITAGORA, Editura Academiei R.S.R.,1986

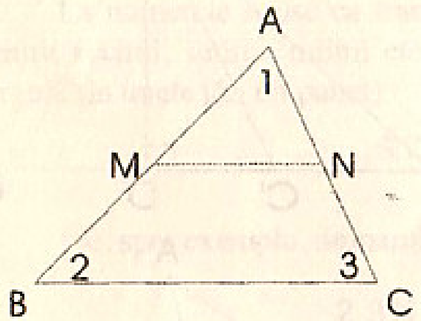
(2) W. Gellert, H. Kästner, Dr. S. Neuber - LEXIKON DER MATHEMATIK, BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT LEIPZIG, 1979.

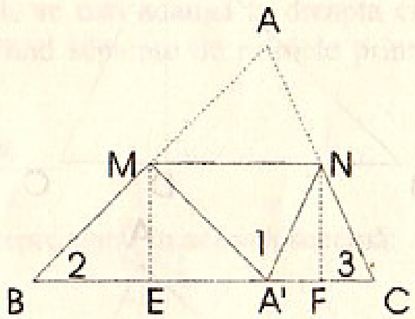
DEMONSTRAŢII PRIN ÎMPĂTURIREA TRIUNGHIURILOR DIN HÂRTIE

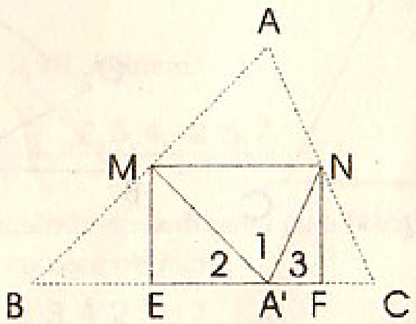
Grigorovici Mariana

Este arhicunoscut faptul că în orice triunghi suma unghiurilor este de 180°. La fel de cunoscută este şi demonstraţia cu ajutorul unei paralele dusă printr-unul din vârfurile triunghiului. Acestă demonstraţie nu face altceva decât să adune într-un vârf cele trei unghiuri sub forma unui unghi de 180°.

Acelaşi rezultat se poate obţine şi dacă îndoim un triunghi decupat din hârtie, în felul următor:

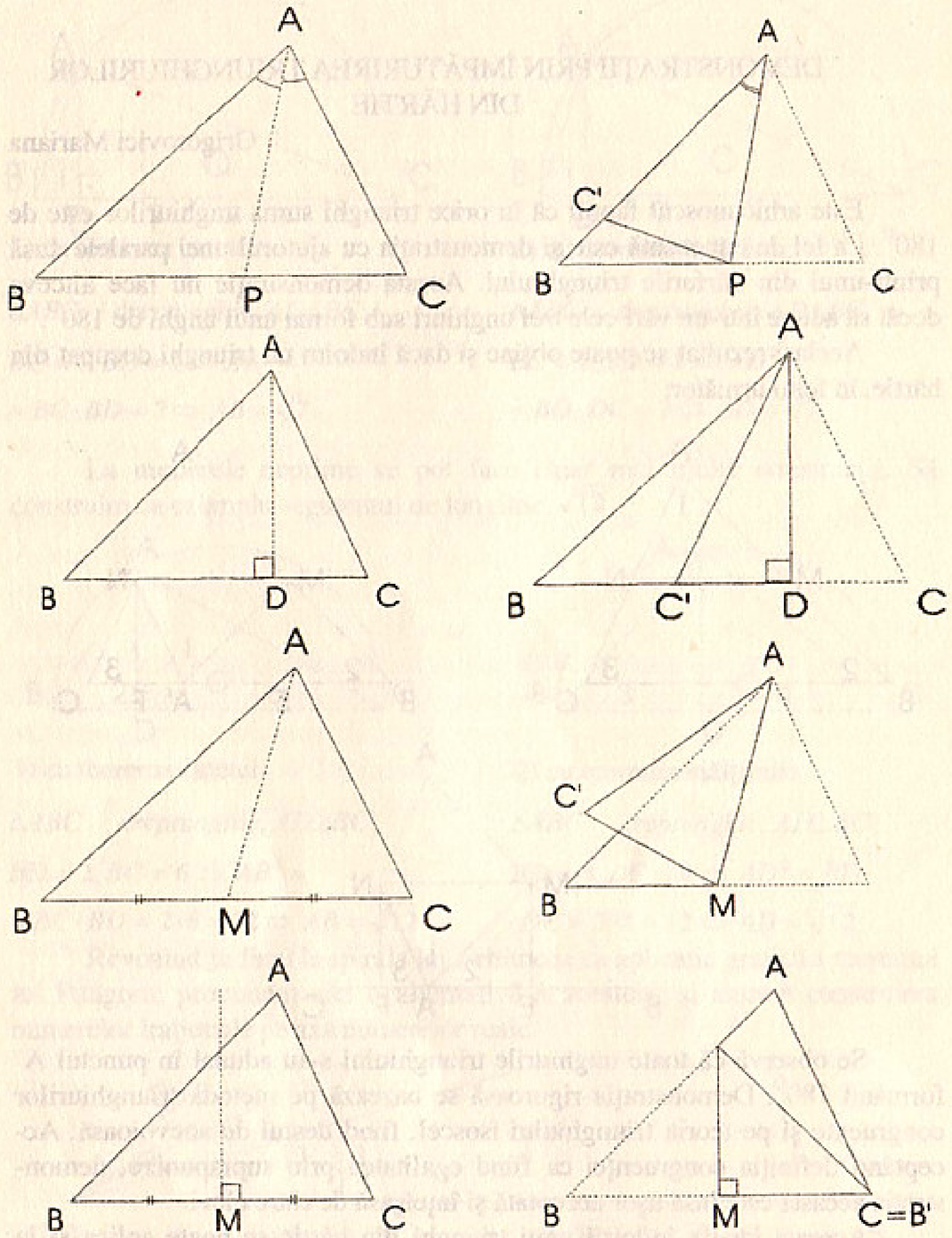






Se observă că toate unghiurile triunghiului s-au adunat în punctul A' formând 180°. Demonstraţia riguroasă se bazează pe metoda triunghiurilor congruente şi pe teoria triunghiului isoscel, fiind destul de anevoioasă. Acceptând definiţia congruenţei ca fiind egalitatea prin suprapunere, demonstraţia aceasta este însă uşor acceptată şi înţeleasă de către elevi.

Aceeaşi idee a îndoirii unui triunghi din hârtie se poate aplica şi la construcţia liniilor importante în triunghi, respectiv la concurenţa acestora. Iată în continuare, modul de îndoire pentru bisectoare, înălţime, mediană şi mediatoare.



În cazul triunghiurilor obtuzunghice, acestea nu trebuie decupate de pe foaia de hârtie pentru a putea fi vizualizată intersecţia celor trei înălţimi, respectiv mediatoare în exteriorul triunghiului.

CE SE MUTĂ, VIRGULA SAU NUMĂRUL?

după o sugestie de Wolf Klein

O întrebare stupidă pentru cei mai mulţi şi totuşi la înmulţirea sau împărţirea unei fracţii zecimale cu 10 nu se mută virgula la dreapta sau la stânga, ci numărul!

Să analizăm puţin această afirmaţie. Numerele naturale se scriu poziţionat după următorul sistem:

S Z U	S Z U	S Z U	S Z U
MILIARDE	MILIOANE	MII	UNITĂŢI

La numerele scrise ca fracţii zecimale se mai adaugă la dreapta cifre pentru zecimi, sutimi, miimi etc, acestea fiind separate de primele printr-o virgulă (în unele ţări un punct):

S Z U	,	Zi Si Mi

Fie, spre exemplu, numărul 2342,57 reprezentat în această schemă:

2	3	4	2	,	5	7

Dacă îl împărţim la 10 obţinem:

2	3	4	,	2	5	7

întreg numărul mutându-se la dreapta cu o poziţie.
Dacă îl înmulţim cu zece obţinem:

2	3	4	2	5	,	7

La înmulţirea numărului 75,2 cu 100 obţinem:

7	5	2	,

Adică şapte mii cinci sute două zeci. Între 2 şi virgulă mai trebuie pus desigur un zero care înseamnă tot loc liber. Deci la înmulţirea lui 75,2 cu 100 se mută numărul la stânga şi nu virgula la dreapta.

q.e.d.