GÂNDIREA ARITMETICĂ vs. GÂNDIREA ALGEBRICĂ

Un eseu cu exemplificare pe

INTRODUCEREA OPERAȚIEI DE PUTERE LA NUMERE NATURALE

Una din întrebările esențiale, dar despre care mai nimeni nu-şi face multe gânduri, este următoarea: **unde este trecerea de la aritmetică la algebră?**

Pe vremuri (până după '89) manualele de clasa a V-a şi a VI-a erau denumite *de Aritmetică*. Prin bibliotecă mai am câteva culegeri din anii '90 cu denumirea de *Aritmetică*. Apoi, odată cu modernizarea, a început să fie folosită denumirea de *Algebră*. Şi într-adevăr, multe manuale sau culegeri din anii 2000 purtau deja pe bună dreptate denumirea "de algebră", pentru că ajunseseră pline de *gândire algebrică*.

Ce este **gândirea aritmetică** şi ce este **gândirea algebrică,** şi cum se diferențiază una de cealaltă?

În lucrarea *Laboratorul de matematică*, apărută în 1973, Acad. N. Teodorescu atinge acest subiect în primul capitol, făcând referire la Jean Piaget:

Structura logică a minții copilului nu este aceeaşi ca a adultului şi nu atinge stadiul adult de dezvoltare înainte de vârsta de 11 – 12 ani.

În teoria lui Piaget se menționează mai multe stadii de dezvoltare la copii, primul fiind cel senzorimotor, durând aproximativ până la vârsta de doi ani. Stadiul următor preoperațional ține până la şapte ani, când lasă loc ***stadiului operațional concret****, care duce copilul până aproximativ la vârsta de 11 ani. Ultimul stadiu începe după această vârstă sub numele de* ***stadiu operațional formal****, care este un nivel adult de gândire* (conform lucrării *Laboratorul de matematică*, N.Teodorescu, Gh.N.Rizescu, B.Ionescu, D.Ogrezeanu, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973, pag.4-6).

Dl. Academician Teodorescu vorbeşte în această lucrare, chiar de la bun început, despre ***un mod ştiințific de a gândi*** *la elevii şcolii de cultură generală*, referindu-se astfel la ultimul stadiu, cel operațional formal.

Eu consider că cele două tipuri de gândire amintite inițial, cea aritmetică respectiv cea algebrică pot fi incluse, asimilate celor două stadii de dezvoltare ale elevilor, cel operațional concret, respectiv cel operațional formal.

Desigur că ne stă pe limbă o primă întrebare: mai exact când, la vârsta de 11 – 12 ani, are loc trecerea respectivă? Pentru că nouă, profesorilor ne-ar conveni ca acest punct de trecere să fie cât mai repede, astfel încât să ne adresăm elevilor cât mai ştiințific, nu aritmetic, ca învățătoarele. Din Pedagogia Waldorf îndrăznesc să susțin un răspuns orientativ statistico-teoretic, anume la **11 ani şi 8 luni**. Dar acesta este doar un răspuns sec, realitatea din clasă putând fi bulversantă atât pentru profesor, cât şi pentru copii: unii elevi trec mai repede în noul stadiu de gândire, alții mai târziu. În plus, acestui fenomen i se mai adaugă şi alți factori, cum ar fi intelectualizarea precoce dar superficială, ce apare la tot mai mulți elevi, datorită educației moderne şi a folosirii mijloacelor IT (calculatoare, internet, tablete, smartphon-uri). Aparent la mulți copii trecerea are loc deja în ciclul primar, dar capacități concrete de gândire algebrică nu se mai instalează uneori nici în clasa a VIII-a.

Din punct de vedere al materiei, al lecțiilor, marile întrebări legate de acest subiect ar fi următoarele: **unde se face trecerea de la gândirea aritmetică la gândirea algebrică**, şi mai ales, care ar fi diferențele dintre aceste tipuri de gândire, dacă tot le-am amintit? Iar apoi, **când ar fi potrivit să fie trecuți elevi, ca mare masă, de la o gândire la cealaltă?** Când am spus "ca mare masă" m-am gândit la blocul mare de elevi, masa mare de sub

Clopotul lui Gauss, nu doar la vârfuri, la olimpici şi la cei mai precoce dezvoltați, care oricum reprezintă un procent foarte mic din total.
Nu mi-am propus să răspund tuturor acestor întrebări cu această ocazie, dar îndrăznesc să susțin că un criteriu pentru stabilirea trecerii de la aritmetică la algebră ar putea fi **respectarea sau nerespectarea ordinii operațiilor** (accentuez, acesta ar putea fi un criteriu, nu susțin că ar fi singurul criteriu şi nici nu susțin că ar fi cel mai bun criteriu de departajare).
Este clar, **aritmetica respectă ordinea operațiilor** (mai întâi puterea, apoi cele de ordinul doi, iar în final adunarea şi scăderea, dacă sunt scrise curat, fără distorsionarea priorităților prin paranteze). Dimpotrivă, algebra reuşeşte să facă calcule şi acolo unde aritmetica se blochează, sărind în anumite situații ordinea clasică a operațiilor (un exemplu în acest sens ar fi factorul comun).
Putem spune pe scurt că **algebra sparge ordinea aritmetică a operațiilor**. Dar nu o face la întâmplare, ci conform unor proprietăți şi reguli bine studiate şi riguros stabilite. Acestea se învață la şcoală şi avem pretenția ca elevii să le poată aplica „din prima". Elevii buni, cei care au făcut pasul dinspre gândirea aritmetică spre gândirea mai evoluată a algebrei, reuşesc să aplice aceste reguli noi „din prima". Elevii la care această trecere încă nu s-a produs vor avea însă mari dificultăți în aplicarea "noii matematici" şi au nevoie de multă răbdare şi exercițiu până reuşesc şi ei să le stăpânească; de multe ori aceştia fac saltul doar la recapitularea şi pregătirea din clasa a VIII-a a examenului.

*

Odată înțelese aceste aspecte, să aruncăm o privire asupra lecției despre **puterea numerelor naturale**, operație care este introdusă prima dată în sem. I din clasa a V-a, anume cum arată încă această lecție în mintea multora dintre noi.
Lecția tradițională se desfăşura în felul următor: mai întâi avea loc o scurtă explicație (poate definiție) a operației, cu denumirea termenilor (bază, exponent) urmată de câteva exemple, după care se trecea la proprietăți. Totul dura de obicei o oră, după care se ajungea la exerciții şi la temă, prin exerciții înțelegând aplicații la proprietățile studiate. Cine s-a prins „bravo lui"; dar pentru elevul la care lucrurile au mers prea repede, "ghinion!". Mulți profesori mai predau şi acum după acest model. Şi aşa ne trezim cu elevi prin clasa a VII-a care, întrebați de operația de putere, zic că este un fel de înmulțire, pentru că ei acolo s-au pierdut de profesor şi pierduți au rămas.
Cât despre manuale/culegeri în anii '2000, majoritatea nu prea aveau decât sporadic exerciții pentru primul pas al lecției, cel de învățare şi însuşire a noii operații de putere. Se scăpa faptul că aici trebuie suficiente exemple, astfel încât elevul de nivel mediu să poată exersa noua operație şi aspectul imediat legat de aceasta, anume poziționarea acesteia în ordinea operațiilor.
În acest sens programa oficială schimbată de câțiva ani buni, este clară: proprietățile operației de putere care nu respectă ordinea operațiilor au fost trecute la începutul clasei a VI-a. Noile culegeri folosite ca manuale actuale (revizuite anual) s-au adaptat noilor programe şi au efectuat schimbarea măcar la suprafață, dar câți dintre profesori i-au şi înțeles sensul? Întreb pentru că în culegerile-manuale pentru clasa a V-a au mai rămas o sumedenie de exerciții care folosesc gândirea algebrică şi unele proprietăți ale operației de putere care nu mai sunt în programă (au fost scoase din "lecție", dar au rămas la zona de "recapitulare"). Fără să mai vorbesc de culegerea primită acum, în septembrie 2015, de la o editură, ca material promoțional, şi în care lecția apare prezentată "dintr-un foc", în forma ei clasică, deci cu cei doi paşi într-o singură lecție!

Sper că e clar de ce este greşită vechea formă a lecției: pentru majoritatea elevilor erau prezentați doi paşi foarte dificili într-o singură lecție, **introducerea unei noi operații** şi apoi **saltul la gândirea superioară, algebrică**. Un pas nou l-ar mai face ei, dar doi paşi noi deodată era pur şi simplu prea greu pentru foarte mulți elevi! Şi aşa începeau problemele acasă, la făcutul temei cu părinții, sau la copierea temei de la alți colegi etc.
Prin prezentul eseu încerc să lămuresc importanța fragmentării acestei lecții în doi paşi, primul fiind **operația de putere în forma ei simplă** (inclusiv cazurile particulare n^1, n^0, 1^n şi 0^n) şi aplicarea acesteia **în funcție de ordinea efectuării operațiilor** (deci exerciții în viziunea aritmetică, deja cunoscută şi doar extinsă cu noua operație).
Abia după ce operația de putere funcționează bine (adică măcar săptămâna următoare, deşi programa prevede acest pas în anul şcolar următor), se poate trece la etapa a doua, cea algebrică, adică la **proprietățile operației de putere** şi la felul în care prin acestea se încalcă ordinea operațiilor.

*

Pentru cei doritori de a preda cât mai potrivit vârstei şi a-i atrage pe cât mai mulți elevi spre noua lecție, mai dăm în continuare *un pont*.
Suntem obişnuiți să introducem noile conținuturi destul de sec, prin definiții sau scurte explicații teoretice (gândiți-vă câți elevi ratează astfel începutul lecției doar pentru că-şi caută o ascuțitoare sau un patron de cerneală exact în scurtul moment al definiției). Lecțiile noi prind mult mai bine dacă sunt precedate de o introducere din lumea reală, poate o situație, o poveste scurtă datorită căreia, **prin problematizare se stârneşte interesul elevilor**.
În cazul de față, al introducerii operației de putere, cel mai potrivit ar fi ca în ora precedentă să le propunem elevilor renumita problemă cu boabele de pe tabla de şah. Există multe variante ale acestei poveşti cu înțeleptul care l-a învățat pe un rege jocul de şah. Când înțeleptul a vrut să plece înapoi în țara sa, regele a vrut să-l răsplătească cu toate bogățiile lumii. Înțeleptul, pentru a-i da regelui o ultimă lecție la îngâmfarea sa, i-a cerut doar atât: pe primul pătrățel al tablei de şah un bob de grâu (povestea merge şi cu boabe de orez), pe al doilea pătrățel două boabe, pe al treilea pătrățel patru boabe şi aşa mai departe, pe fiecare pătrățel dublul boabelor câte erau pe pătrățelul precedent.
Elevii vor primii ca temă să calculeze câte boabe sunt de pus pe fiecare pătrățel al tablei de şah (desigur fără calculator, ca să exerseze înmulțirea).
Vă puteți închipui, în ora următoare, după introducerea operației de putere, la exemple, când veți scrie puterile lui doi ce mare bucurie va fi în clasă. Atunci vor înțelege de ce se numeşte PUTERE.
Legat de acest moment, o colegă îşi aminteşte cât de nedumeriți sunt elevii la rezultate de tipul 2^{35}. Pentru elevul aflat încă la nivelul de gândire aritmetică acest răspuns este neterminat. De-abia mai târziu elevii pot înțelege magia unui astfel de răspuns. Este deci evident că la problema cu şahul, prezentată ca introducere, nu vom veni cu răspunsuri de tipul *pe ultima pătrățică sunt* 2^{63} *boabe*, sau mai rău, concluzii de tipul *în total vor fi nevoie de* $2^{64} - 1$ *boabe*. Acestea pot fi tratate mai târziu, când mintea elevilor s-a copt pentru un astfel de limbaj şi raționamente de tip algebric.
O alternativă mult mai uşoară la problema şahului, foarte atractivă mai ales băieților, ar fi studiul numărului de echipe care participă la o cupă de fotbal cu finale, semifinale, sferturi, optimi etc. Din acestea se pot apoi deduce legăturile cu puterile lui doi, dar efectul nu este nici pe departe acelaşi ca la problema şahului

Sept.2015, C.Titus Grigorovici

Efectuați următoarele calcule respectând ordinea operațiilor:

1. $32 - 3 \cdot 2^3$
2. $3^4 - 5 \cdot 2^4$
3. $(5^2 - 4^2) : 3$
4. $12^0 + 12^2 : 6 \cdot 4$
5. $2^3 + 1^{23} - 3^2 - 0^{32}$
6. $8 - 2^5 \cdot 3 : 24$
7. $33 + 3 \cdot 2^4 - 3^4$
8. $10 - 12^2 : (11 - 9)^4$
9. $6^0 + 3^6 - 6^3 + 0^3$
10. $10^2 - (25^2 - 5^3) : 5$
11. $1^3 + 3^3 + 5^3$
12. $(8^0 + 3 \cdot 2^3) : 5^2$
13. $1 + 2^5 \cdot (8^2 - 4^3)$
14. $3 \cdot 2^4 : [3 \cdot (11 - 3^2)]$
15. $(148 - 48 : 2^4) : 29$
16. $5^3 \cdot 3 : 5^2 - 2^6 \cdot 3 : 2^4$
17. $5^5 + 4^4 : (3^3 + 2^2 + 1^1)$
18. $(5^3 - 3^3) : 7^2 - 1^{537} + 10^3$
19. $144 : (7^2 - 1^5 + 0^7 - 5^2 + 2^0)$
20. $5^4 - (17 + 5)^2 + 17^0 - 5^2 - 5 \cdot 2^3$
21. $3^2 + 21^0 \cdot (21^2 - 21 \cdot 2 + 1) : 2^3$
22. $10^4 + [3^2 + 2^1 \cdot (3^5 - 5^3) - 5^1] : 10$
23. $17 : (7^2 - 3 \cdot 2^4) - (2^3 + 3^2) : 17^0 + 1^{17}$
24. $2 + 5^2 + 7 \cdot [3 \cdot 2^3 - 5 \cdot (2 \cdot 3^3 - 51)]$
25. $(2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2^1 - 2^0) : (2^3 - 2^0)$
26. $[122 - 11 : (3^3 - 2^4)] : 11$
27. $17^2 - 288 : (5^3 + 19) - 2^8 + 17^0$
28. $(19 - 7 \cdot 2)^3 - (19 - 2^3)^2$
29. $(25^1 - 1^{25}) : [1 + 7^2 : (2^5 - 5^2)]$
30. $(1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5) : 3413$
31. $10 \cdot 12^2 + 6^3 - 3^4 \cdot (8^2 - 198 : 11 \cdot 3)$
32. $[2 + 2 \cdot (3^2 + 2 \cdot 5^2 : 10 - 7)^2] : 10^2$

Efectuați următoarele calcule respectând ordinea operațiilor:

1. $32 - 3 \cdot 2^3$
2. $3^4 - 5 \cdot 2^4$
3. $(5^2 - 4^2) : 3$
4. $12^0 + 12^2 : 6 \cdot 4$
5. $2^3 + 1^{23} - 3^2 - 0^{32}$
6. $8 - 2^5 \cdot 3 : 24$
7. $33 + 3 \cdot 2^4 - 3^4$
8. $10 - 12^2 : (11 - 9)^4$
9. $6^0 + 3^6 - 6^3 + 0^3$
10. $10^2 - (25^2 - 5^3) : 5$
11. $1^3 + 3^3 + 5^3$
12. $(8^0 + 3 \cdot 2^3) : 5^2$
13. $1 + 2^5 \cdot (8^2 - 4^3)$
14. $3 \cdot 2^4 : [3 \cdot (11 - 3^2)]$
15. $(148 - 48 : 2^4) : 29$
16. $5^3 \cdot 3 : 5^2 - 2^6 \cdot 3 : 2^4$
17. $5^5 + 4^4 : (3^3 + 2^2 + 1^1)$
18. $(5^3 - 3^3) : 7^2 - 1^{537} + 10^3$
19. $144 : (7^2 - 1^5 + 0^7 - 5^2 + 2^0)$
20. $5^4 - (17 + 5)^2 + 17^0 - 5^2 - 5 \cdot 2^3$
21. $3^2 + 21^0 \cdot (21^2 - 21 \cdot 2 + 1) : 2^3$
22. $10^4 + [3^2 + 2^1 \cdot (3^5 - 5^3) - 5^1] : 10$
23. $17 : (7^2 - 3 \cdot 2^4) - (2^3 + 3^2) : 17^0 + 1^{17}$
24. $2 + 5^2 + 7 \cdot [3 \cdot 2^3 - 5 \cdot (2 \cdot 3^3 - 51)]$
25. $(2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2^1 - 2^0) : (2^3 - 2^0)$
26. $[122 - 11 : (3^3 - 2^4)] : 11$
27. $17^2 - 288 : (5^3 + 19) - 2^8 + 17^0$
28. $(19 - 7 \cdot 2)^3 - (19 - 2^3)^2$
29. $(25^1 - 1^{25}) : [1 + 7^2 : (2^5 - 5^2)]$
30. $(1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5) : 3413$
31. $10 \cdot 12^2 + 6^3 - 3^4 \cdot (8^2 - 198 : 11 \cdot 3)$
32. $[2 + 2 \cdot (3^2 + 2 \cdot 5^2 : 10 - 7)^2] : 10^2$

P3NT4GON1A